Háskóli Íslands
Verkfræðideild
Rafmagns- og tölvuverkfræði

08.31.07 Sjálfvirk stýrikerfi
Anna Soffía Hauksdóttir
Gísli Herjólfsson

HÁSKÓLI ÍSLANDS

Heimapróf II

28. nóvember 2006

Sævar Öfjörð Magnússon

Dæmi 1

Höfum kerfið

$$G(s) = \frac{50}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

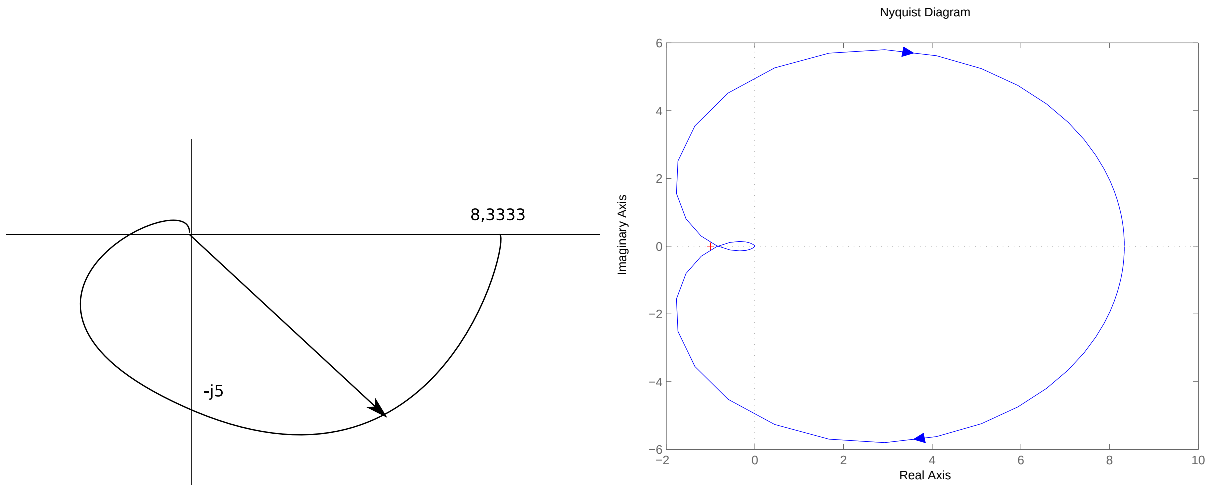
.

a-liður

Við getum fundið byrjunarpunkt Nyquist feril kerfisins með því að stinga inn tíðninni $\omega = 0$:

$$G(j0) = \frac{50}{1 \cdot 2 \cdot 3} \approx 8.3333$$

Við getum séð að þar sem kerfið hefur 3 póla en ekkert núll þá færist aðkomuhornið um -90° fyrir hvern pól. Aðkomuhornið þegar $\omega \rightarrow \infty$ er því -270°.



(a) *Skissa af Nyquist mynd kerfisins.* (b) *Nyquist ferillinn fenginn með Matlab.*

Mynd 1: *Nyquist ferlar.*

b liður

Teiknum Nyquist ferilinn með Matlab á mynd 1(b) og sjáum að skissan úr a) lið er nokkurn veginn rétt. Notum því næst reglu Nyquists til þess að meta stöðugleika kerfisins. Við sjáum að lykkjan umlykur ekki punktinn $s = -1 + j0$ ($N = 0$) og að enginn póla opnu lykkjunnar er í hægra hálfplani ($P = 0$). Við höfum því að

$$Z = N + P = 0 + 0 = 0$$

Við ályktum því að kerfið sé stöðugt. Finnum því næst $G_c(s) = K$ sem setur kerfið á mörk stöðugleika. Routh fylkið er

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 11 \\
s^2 & 6 & 50K + 6 \\
s^1 & -\frac{50}{6}K + 10 & \\
s^0 & -(50K + 6) &
\end{array}$$

Þar sem

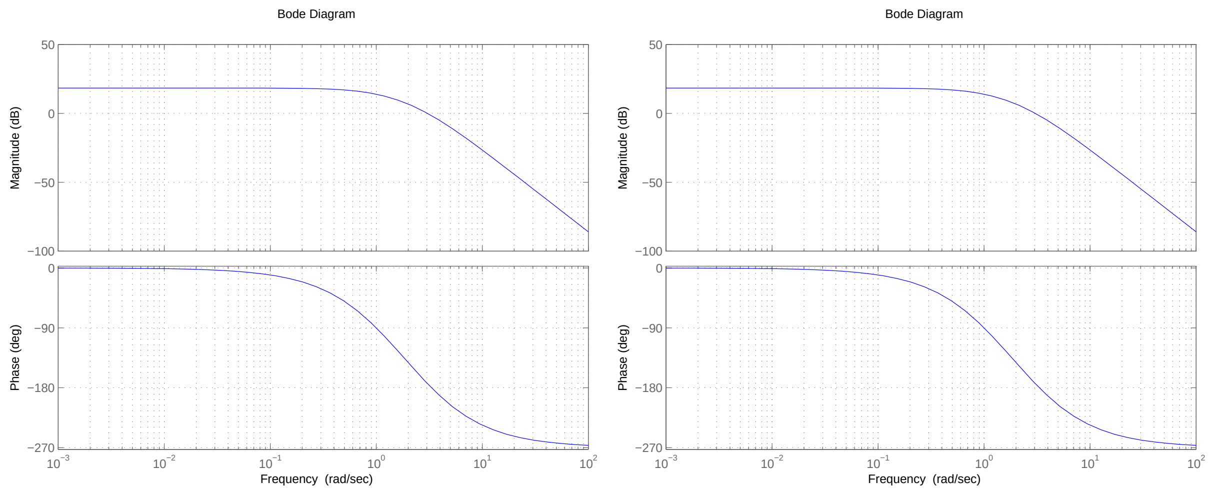
$$b_1 = \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 6 & 50K+6 \end{vmatrix} = -1/6 \cdot (50K + 6 - 6 * 11) = -\frac{50}{6}K + 10,$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} 6 & 50K+6 \\ -50K/6+10 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-(\cancel{-50K/6+10})(50K+6)}{\cancel{-50K/6+10}} = -(50K+6).$$

Höfum þá að $-(50K+6) > 0 \Rightarrow K > \frac{-6}{50}$ og $-50K/6 + 10 > 0 \Rightarrow K < 6/5$. Við sjáum á Nyquist ferlinum á mynd 1(b) að aukin mögnun lætur ferilinn umlykja -1, sem myndi gera kerfið óstöðugt í lokaðri lykkju. Þá er gildið á K sem setur kerfið á mörk stöðugleika væntanlega $K = 6/5$.

c liður

Teiknum Bode rit $G(s)$ á mynd 2(a).



(a) *Bode-rit fengið með Matlab.* (b) *Bode-rit fengið með Matlab auk beinlínunálgana.*

Mynd 2: *Bode rit fyrir $G(s)$.*

Til hliðar teiknum við svo beinlínunálganir á mynd 2(b). Til þess að finna beinlínunálgun Bode ritsins þurfum við að umrita yfirfærslufall kerfisins til þess að finna brottíðnir þess:

$$G(s) = \frac{50}{3 \cdot 2 \cdot 1(\frac{s}{3}+3)(\frac{s}{2}+2)(\frac{s}{1}+1)}$$

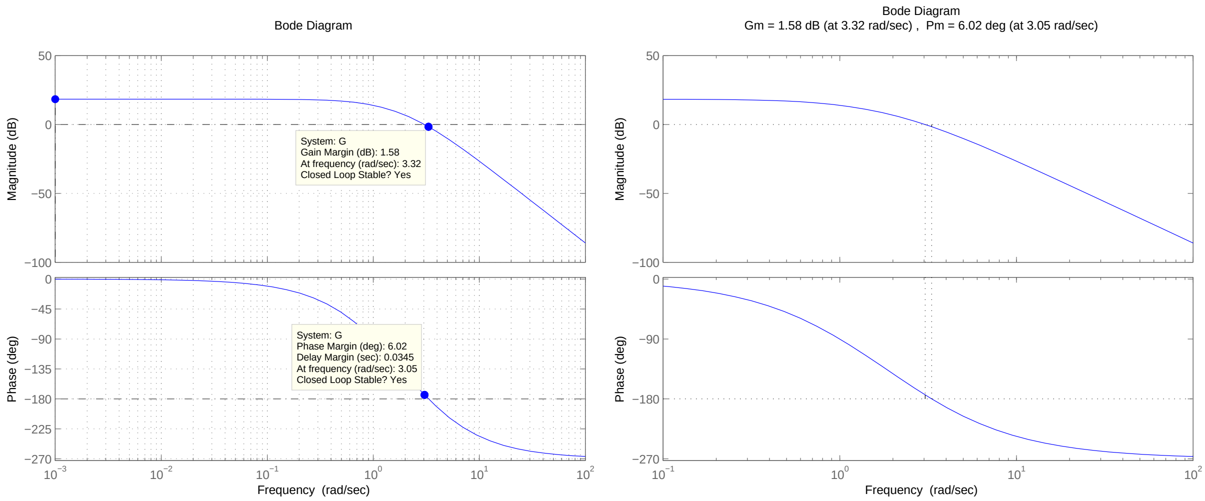
Brottíðnir eru því í $\omega = 1, 2, 3$. DC gildið í Bode ritinu finnum með:

$$20 \cdot \log_{10}(50/6) = 18.42dB$$

Þar sem við höfum bara póla í kerfinu leggur hver þeirra til $-20dB$ á hverja tíföldun í tíðni. Hallinn á ferlinum er því orðinn $-60dB$ við $\omega = 3$.

d liður

Fasa- og mögnunarmörk kerfisins má lesa af Bode ritinu en einnig má fá þau með `margin` skipuninni.



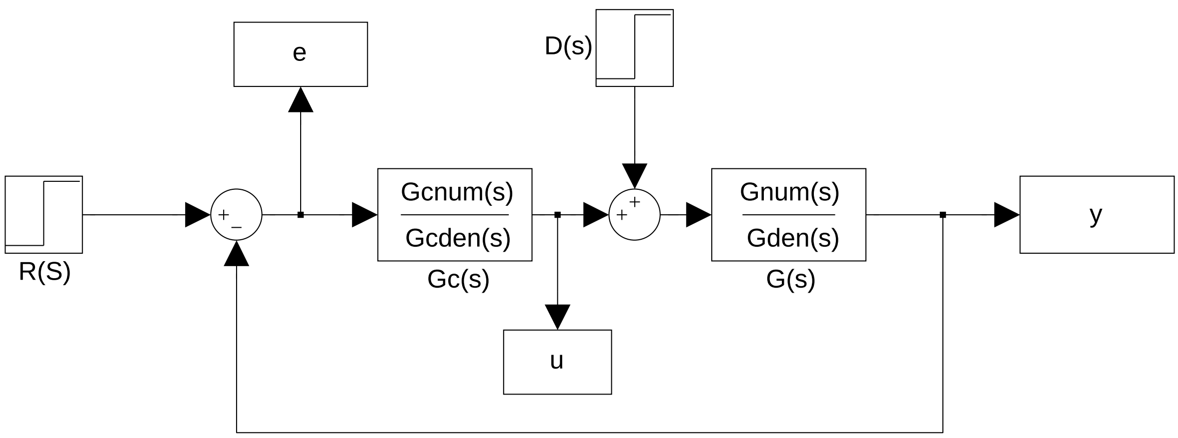
(a) *Bode-rit með fasa- og mögnunarmörkum.* (b) *Fasa- og mögnunarmörk með margin skipuninni.*

Mynd 3: *Bode rit fyrir $G(s)$.*

Hvor aðferð sem er gefur sömu fasa- og mögnunarmörk, þ.e. mögnunarmörkin eru 1.53 dB við $\omega = 3.32$ rad/sek og fasamörkin eru 6.02° við $\omega = 3.05$ rad/sek. Við sjáum ennfremur að $-20 \cdot \log_{10}(K) = -20 \cdot \log_{10}(6/5) = 1.58$ dB.

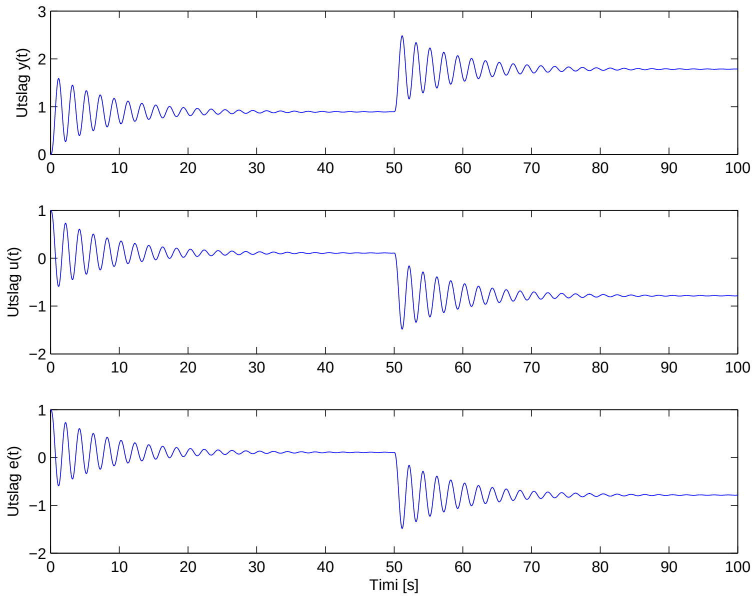
e liður

Kerfið var sett upp í Simulink skv. mynd 4:



Mynd 4: *Simulink líkan af kerfi.*

Hermað var fyrir þrepsvörun frá R við $t = 0$ og svo í beinu framhaldi þreptruflun frá D við $t = 50$. Heildarsvörun útmerkjanna, þ.e. útmerkis, stýrimerkis og skekkju voruð teiknuð á eitt graf (sjá mynd 5).



Mynd 5: *Svörun kerfisins við þrepinnmerki og þreptruflun.*

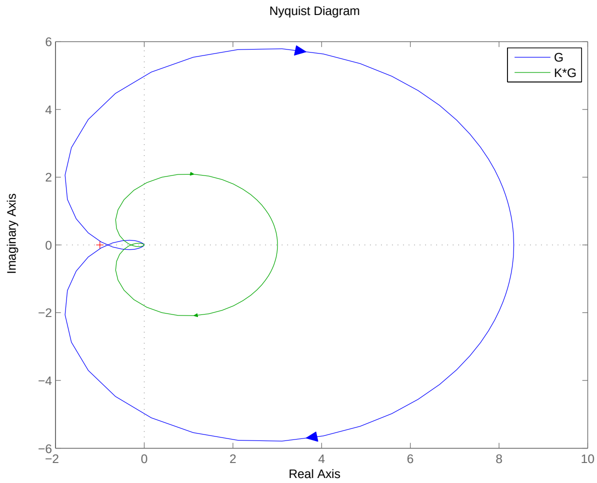
f liður

Næst þurfum við að finna P-stýringu $G_c(s) = K$, þannig að kerfið hafi 50 gráðu fasamörk. Við byrjum á að prófa fasamarkatíðnina sem var fundin í d-lið og prófum okkur áfram þar til við höfum fundið tíðni sem gefur okkur 50° fasamörk.

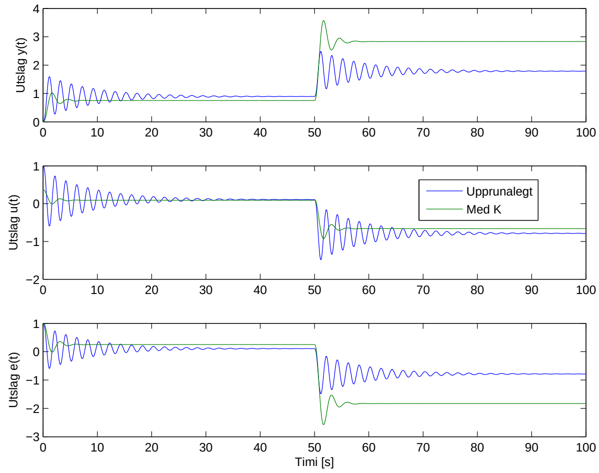
Tafla 1: *Tíðni sem gefur 50° fasamörk fundin.*

ω	$\angle G(j\omega)$
3.05	-174.0664°
2	-142.125°
1.7	-129.4378°
1.72	-130.3491°
1.712313	-130.0000°

Sjáum í töflu 1 að tíðnin $\omega = 1.712313$ uppfyllir fasamörk. Vitum þá að útslagið í þeirri tíðni er $|G(j \cdot 1.712313)| = 2.7725$ og því er $K = 1/2.7725 = 0.3607$ sá mögnunarstuðull sem gefur okkur 50° fasamörk. Við teiknum svo Nyquist ferilinn á sama graf og í b-lið á mynd 6(a) og svo útmerkin eftir hermun á sama graf og í e-lið á mynd 6(b).



(a) *Nyquist.*



(b) *Útmerki eftir hermun.*

Mynd 6: *Nyquist ferlar með og án K og hermun með og án K.*

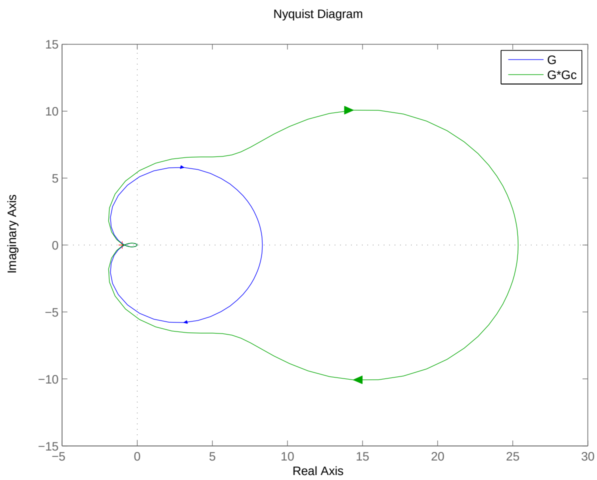
g liður

Nú hönnum við fasaseinkara

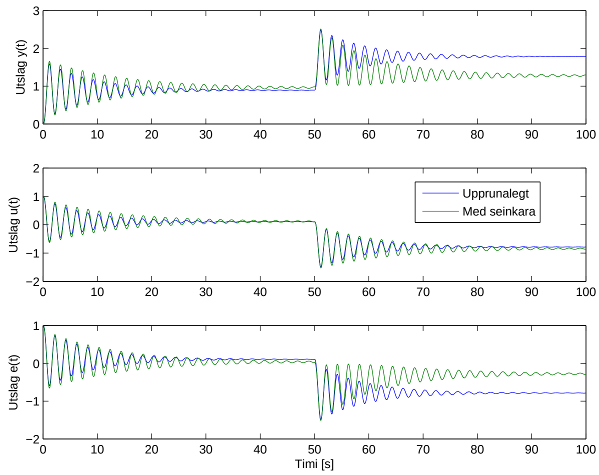
$$G_c(s) = \frac{1 + s/\omega_o}{1 + s/\omega_p}$$

þannig að sekkja við þrepi í æstæðu ástandi verði það sem hún var fyrir, þ.e. DC mögnun heildarstýringar sé einn. Gott val á fasamarkatíðni er $\omega_1 = 1.6$ rad/sek vegna þess að sú tíðni gefur okkur u.þ.b. $50°$ fasamörk. Veljum svo $\omega_0 = 0.16$ rad/sek. Við vitum að ω_p er gefið með

$$\omega_p = \frac{0.1\omega_1}{|G(j\omega_1)|} = \frac{0.16}{\left|\frac{50}{(j*1.6+1)(j*1.6+2)(j*1.6+3)}\right|} = 0.0526 \text{ rad/sek.}$$



(a) *Nyquist.*



(b) *Útmerki eftir hermun.*

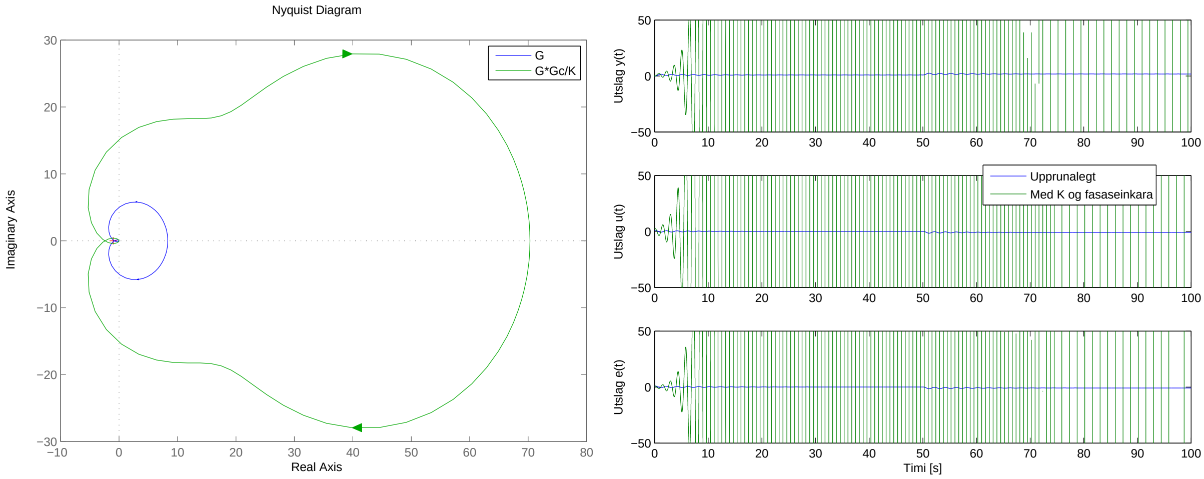
Mynd 7: *Nyquist ferlar með og án $G_c(s)$ og hermun með og án $G_c(s)$.*

h liður

Nú breytum við stýringunni í

$$G_c(s) = \frac{1}{K}\frac{1 + s/\omega_o}{1 + s/\omega_p}$$

þar sem K er úr j-lið og ω_0 og ω_p eru óbreytt úr k-lið. Teiknum svo aftur Nyquist ferla og útmerki úr hermun á myndir 8(a) og 8(b). Sjáum að kerfið verður mjög óstöðugt, enda



(a) *Nyquist.* (b) *Útmerki eftir hermun.*

Mynd 8: *Nyquist ferlar með og án $G_c(s)/K$ og hermun með og án $G_c(s)/K$.*

umlykur Nyquist ferillinn $s = -1$.

i liður

Nú hönnum við fasaflýti

$$G_c(s) = \frac{a_1 s + 0.1}{b_1 s + 1}$$

og viljum fá $T_s = 2$ sek og 50 gráðu fasamörk. Jöfnur (9-33), (9-34) og (9-35) í bók eru greinilega uppfylltar:

$$\omega_1 = \frac{8}{T_s \tan\phi_m} = \frac{8}{2 \cdot \tan 50^\circ} = 4 \cdot \tan 40^\circ = 3.3564$$

$$\angle G(j\omega_1) < -180^\circ + \phi_m \Rightarrow 178.2788^\circ < -130^\circ \Rightarrow 178.2788^\circ < 230^\circ \qquad \text{(satt)}$$

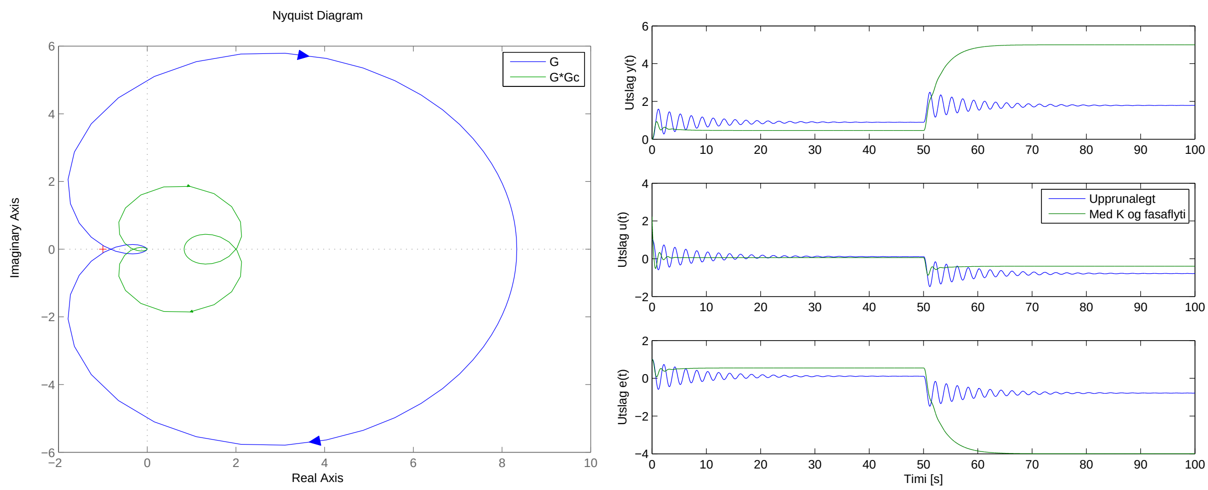
$$|G(j\omega_1)| < \frac{1}{a_0} \Rightarrow 0.7888 < 10 \qquad \text{(satt)}$$

Reiknum því næst a_1 og b_1:

$$\theta = -180^\circ + \phi_m - \angle G(j\omega_1) = 51.7212^\circ$$

$$a_1 = \frac{1 - a_0|G(j\omega_1)|\cos\theta}{\omega_1|G(j\omega_1)|\sin\theta} = \frac{1 - 0.1 \cdot 0.7888 \cdot 0.6195}{3.4 \cdot 0.7888 \cdot 0.785} = 0.4518$$

$$b_1 = \frac{\cos\theta - a_0|G(j\omega_1)|}{\omega_1 \sin\theta} = \frac{0.6195 - 0.1 \cdot 0.7888}{3.4 \cdot 0.785} = 0.2025$$



(a) *Nyquist.* (b) *Útmerki eftir hermun.*

Mynd 9: *Nyquist ferlar með og án fasaflýtis og hermun með og án fasaflýtis.*

Teiknum svo aftur Nyquist ferla og útmerki úr hermun á myndir 9(a) og 9(b):
Sjáum að settlunartíminn T_s er ekki 2 sekúndur eins og hönnunarkröfur gerðu ráð fyrir, hann er nálægt 15 sekúndum. Ástæðan gæti verið sú að við höfum í raun engan pól sem er nógu hraður til þess að gera svörunina nógu hraðvirka.

Matlab kóði fyrir Dæmi 1

```
% Sjalfvirk Styrikerfi
% Heimaprof 2
% Saevar Ofjord Magnusson

clear all
close all

% b lidur
Gnum=50;
Gden=[1 6 11 6];
G = tf(Gnum,Gden);
figure(1)
    nyquist(G,{0.001,100});

% c lidur
figure(2)
        bode(G,{0.001,100});
        grid on

% d lidur
figure(3)
        margin(G);

% e lidur
tdelay = 50;
Gcnum=1;
Gcden=1;
sim('model1.mdl',100);
y1=y;
u1=u;
e1=e;

figure(4)
    subplot(311)
```

```
            plot(y1.time,y1.signals.values)
        subplot(312)
            plot(u1.time,u1.signals.values)
        subplot(313)
            plot(e1.time,e1.signals.values)

% f lidur
fasamork = angle(evalfr(G,j*1.712313))*180/pi;
magnitude = abs(evalfr(G,j*1.712313));
K = 1/magnitude

Gf = K*G;
figure(5)
    hold on
    nyquist(G);
    nyquist(Gf);

tdelay = 50;
Gcnum=K;
Gcden=1;
clear y u e
sim('model1.mdl',100);
y2=y;
u2=u;
e2=e;

figure(6)
    subplot(311)
        plot(y1.time,y1.signals.values,y2.time,y2.signals.values)
    subplot(312)
        plot(u1.time,u1.signals.values,u2.time,u2.signals.values)
    subplot(313)
        plot(e1.time,e1.signals.values,e2.time,e2.signals.values)

% g lidur
w1=1.6;
w0=0.1*w1;
wp=w0/abs(evalfr(G,j*1.6))
Gcnum = [1 w0];
Gcden = [1 wp];
Gc = tf(Gcnum,Gcden);

Gg = Gc*G;
figure(7)
    hold on
    nyquist(G);
    nyquist(Gg);

tdelay = 50;
clear y u e
sim('model1.mdl',100);
y3=y;
u3=u;
e3=e;

figure(8)
    subplot(311)
        plot(y1.time,y1.signals.values,y3.time,y3.signals.values)
    subplot(312)
        plot(u1.time,u1.signals.values,u3.time,u3.signals.values)
    subplot(313)
        plot(e1.time,e1.signals.values,e3.time,e3.signals.values)

% h lidur
Gcnum = [1 w0];
Gcden = K*[1 wp];
Gc = tf(Gcnum,Gcden);

Gh = Gc*G;
figure(9)
    hold on
```

```
    nyquist(G);
    nyquist(Gh)

tdelay = 50;
clear y u e
sim('model1.mdl',100);
y4=y;
u4=u;
e4=e;

figure(10)
    subplot(311)
        plot(y1.time,y1.signals.values,y4.time,y4.signals.values)
    subplot(312)
        plot(u1.time,u1.signals.values,u4.time,u4.signals.values)
        axis([0 100 -50 50])
    subplot(313)
        plot(e1.time,e1.signals.values,e4.time,e4.signals.values)
        axis([0 100 -50 50])

% i lidur
w1=3.4;
a0 = 0.1;
theta = -180 + 50 -angle(evalfr(G,j*3.4))*180/pi
absG = abs(evalfr(G,j*3.4));
a1 = (1-a0*absG*cosd(theta))/(w1*absG*sind(theta))
b1 = (cosd(theta)-a0*absG)/(w1*sind(theta))

Gcnum = [a1 a0];
Gcden = [b1 1];
Gc = tf(Gcnum,Gcden);

Gi = Gc*G;
figure(11)
    hold on
    nyquist(G);
    nyquist(Gi)

tdelay = 50;
clear y u e
sim('model1.mdl',100);
y5=y;
u5=u;
e5=e;

figure(12)
    subplot(311)
        plot(y1.time,y1.signals.values,y5.time,y5.signals.values)
    subplot(312)
        plot(u1.time,u1.signals.values,u5.time,u5.signals.values)
    subplot(313)
        plot(e1.time,e1.signals.values,e5.time,e5.signals.values)
```

Dæmi 2

a liður

Sjáum að

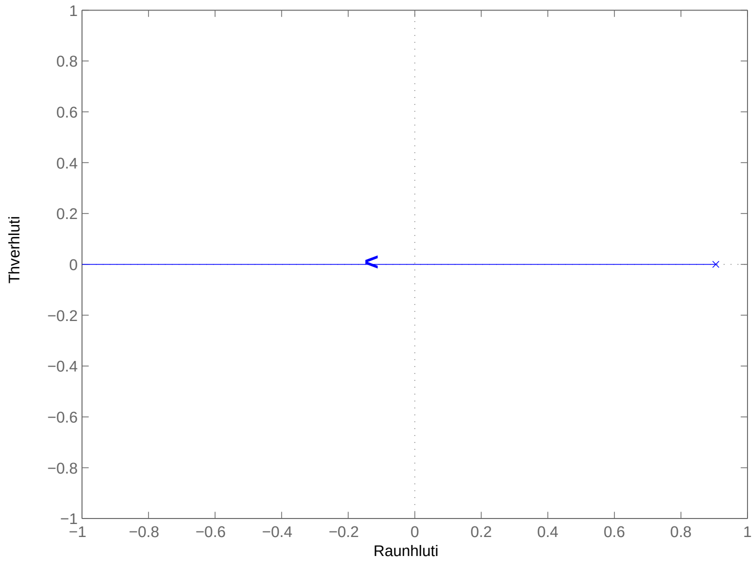
$$
\begin{aligned}
G(z) &= z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s(s+1)}\right] = (1-e^{-Ts})z\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] \\
&= \frac{z-1}{z}\left[\frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}\right] \\
&= \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}
\end{aligned}
$$

b liður

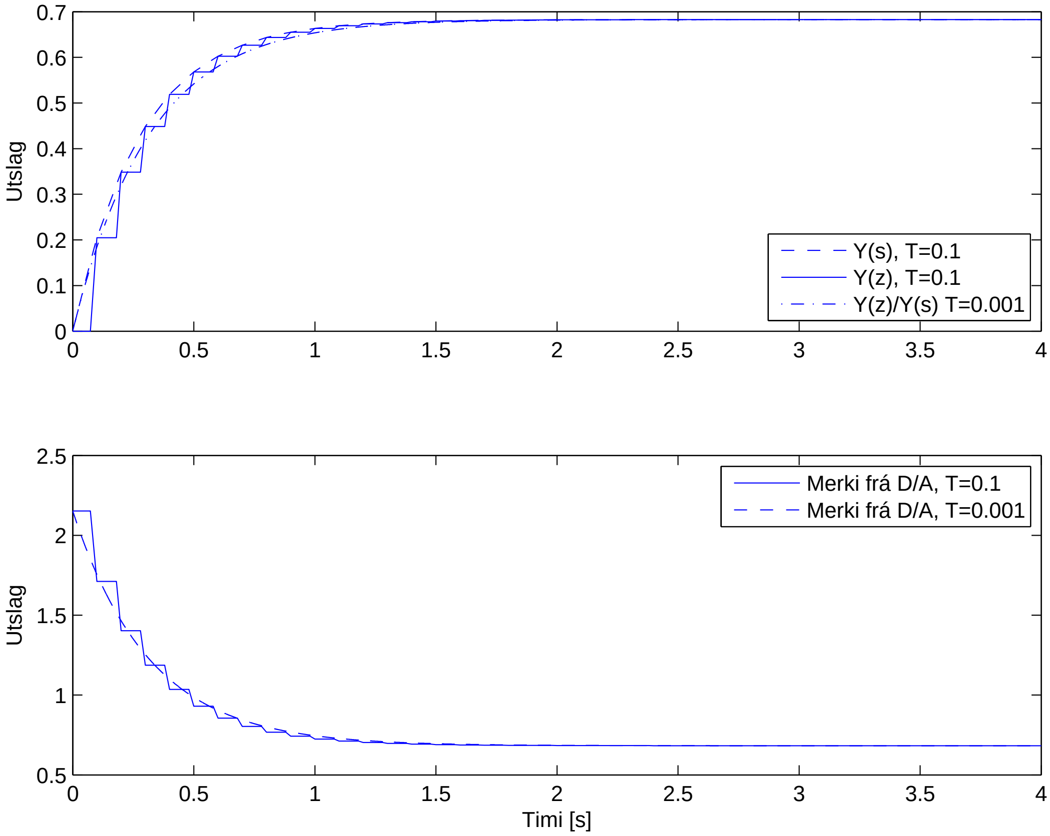
Þegar $T = 0.1$ er

$$G(z) = \frac{0.095163}{z-0.904837}$$

Póll opnu lykkjunnar er því í $z = 0.904837$ og rótarferil má sjá á mynd 10:



Mynd 10: *Rótarferill* $D(z)G(z)$.



Mynd 11: *Svörun kerfisins.*

c liður

Vitum að opna lykkjan er

$$G_{OL}(z) = \frac{K \cdot 0.095163}{z - 0.904837},$$

viljum að

$$|G_{OL}(z)|_{z=0.7} = 1.$$

Þá er

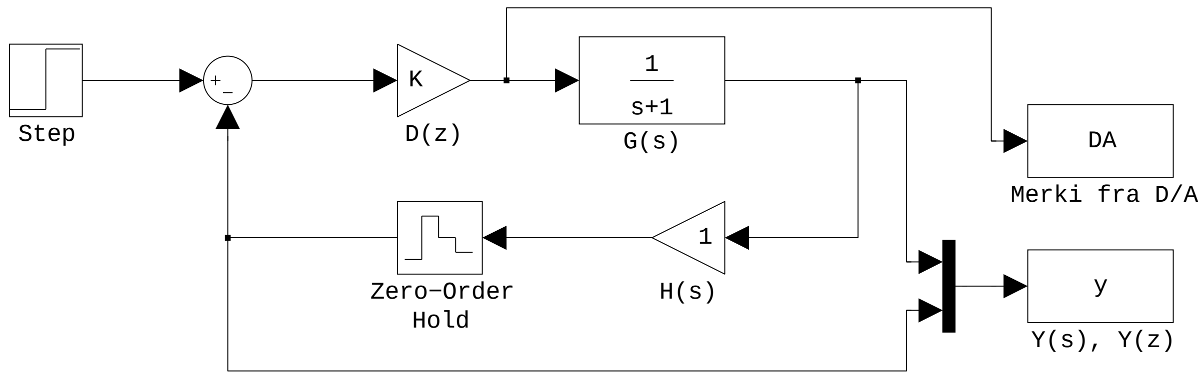
$$K = \frac{|0.7 - \overbrace{0.904837}^{e^{-T}}|}{\underbrace{0.095163}_{1-e^{-T}}} = 2.15249$$

sem þýðir að

$$P_{LL} = e^{-T} - (1 - e^{-T})K = 0.7$$
$$\Rightarrow K = \frac{e^{-T} - 0.7}{1 - e^{-T}}.$$

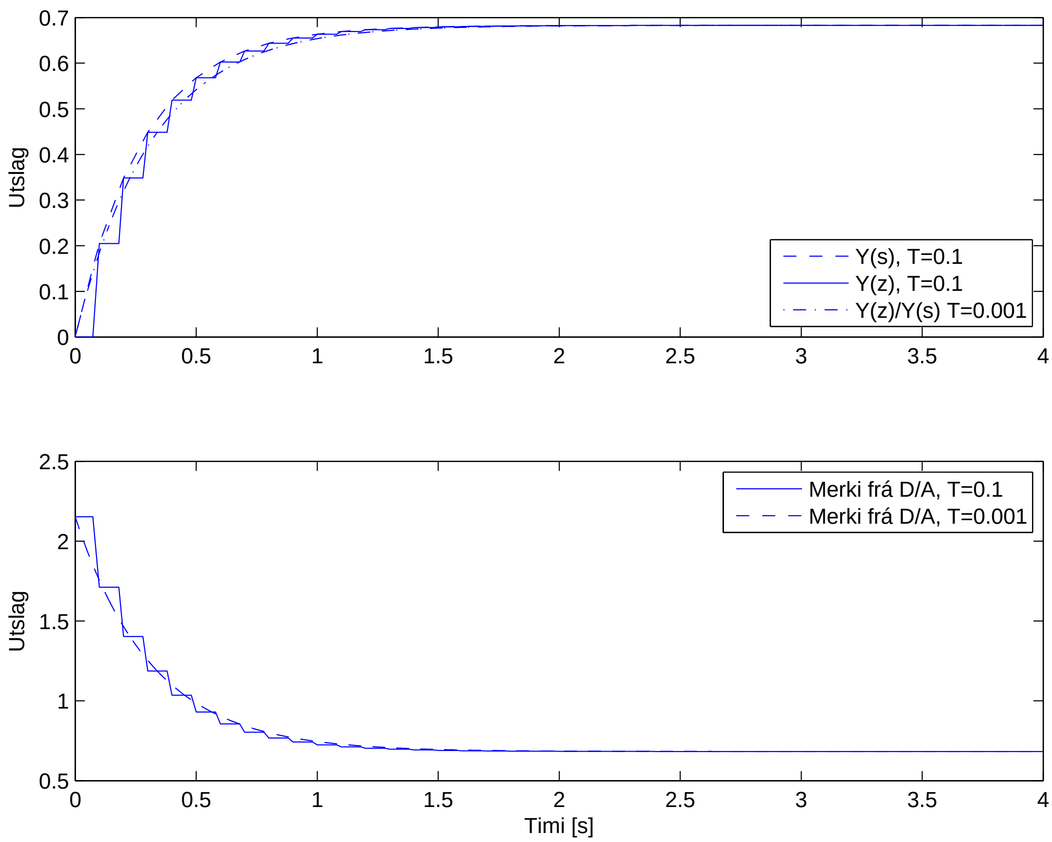
d liður

Kerfið var sett upp í Simulink skv. mynd 12:



Mynd 12: *Simulink líkan af kerfi.*

Hermun var svo framkvæmd með þrepsvörun sem innmerki fyrir tíma $0 \leq t \leq 4$, með gefnum söfnunartíma á *zero order hold* blokkinni. Hermun var endurtekin fyrir minni söfnunartíma eða $T = 0.001$. Útmerki má sjá á mynd 11.

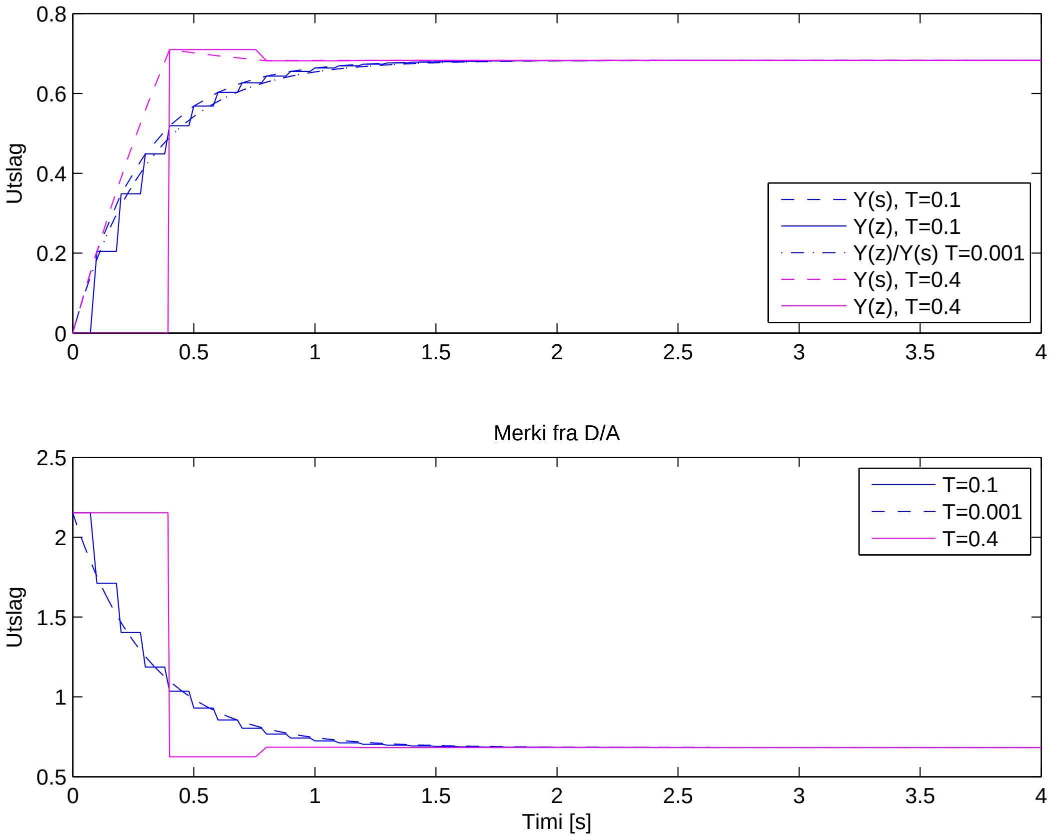


Mynd 13: *Svörun kerfisins.*

Ekki þótti taka því að birta bæði $Y(s)$ og $Y(z)$ þegar söfnunartíminn var lítill, þar eð ferlarnir féllu alveg saman.

e liður

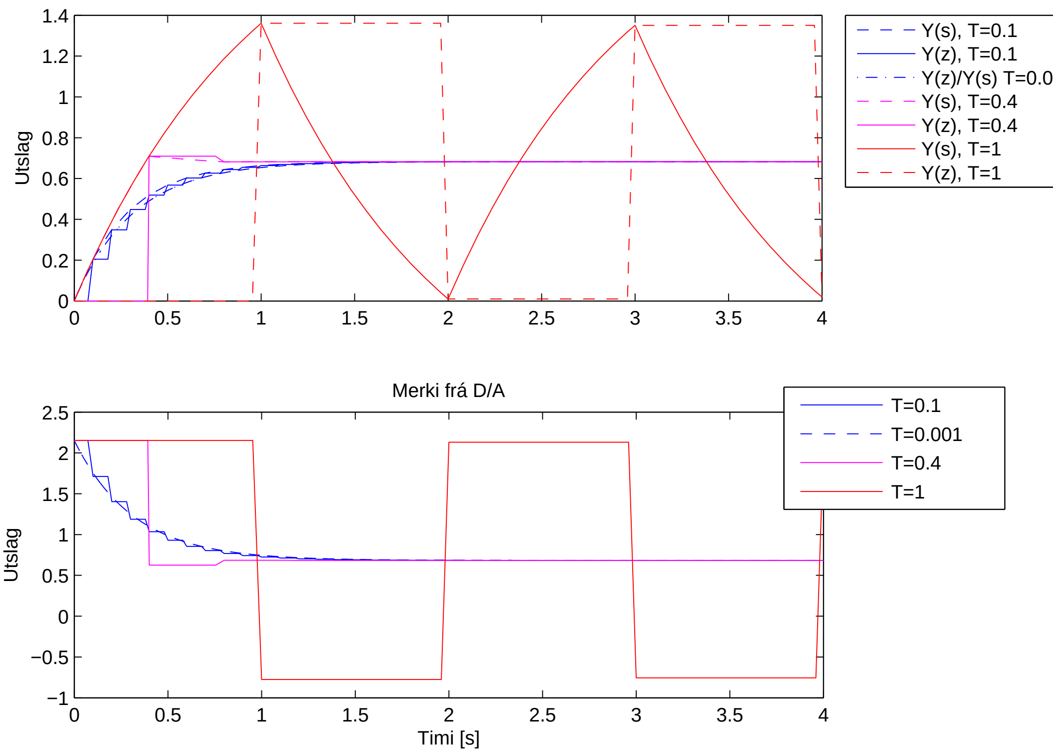
Nú var söfnunartímanum T breytt þar til yfirskot fór að myndast en aðrar breytur látnar óhreyfðar. Niðurstöður má sjá ásamt niðurstöðum í d-lið á mynd 14:



Mynd 14: *Svörun kerfisins.*

Eins og sjá má hefur yfirskot aukist að einhverju leyti, og ekki þarf að auka söfnunartímann mikið til þess að það verði mjög mikið. Söfnunartíminn sem þetta gerðist við var $T_{\text{áhrif}} = 0.4$ sek.

Því næst var T breytt þar til kerfið varð óstöðugt en aðrar breytur látnar óhreyfðar. Niðurstöðum má sjá ásamt fyrri niðurstöðum á mynd 15:



Mynd 15: *Svörun kerfisins.*

Þarna sjáum við að kerfið er farið að sveifla mikið. Ekki tókst að fá fram óstöðugleika þannig að útslagið færi upp úr öllu valdi. Söfnunartíminn sem þetta gerðist við var $T_{\text{óstöðug}} = 0.1$ sek.

Matlab kóði fyrir Dæmi 2

```
% Sjalfvirk Styrikerfi
% Heimaprof 2
% Saevar Ofjord Magnusson

clear all
close all

% b lidur

Gznum = 0.095163;
Gzden = [1 -0.904837];
Gz = tf(Gznum,Gzden);

figure(1)
    rlocus(Gz)
    annotation(1,'textbox','String',{'<'},'FontWeight','bold',...
    'FontSize',16,...
    'FitHeightToText','off',...
    'Color',[0 0 1],...
    'LineStyle','none',...
    'Position',[0.4625 0.4585 0.1054 0.06905]);

```

```
% d lidur

T = 0.1;
K = 2.15249;
sim('model2',4);
Ys = y.signals.values(:,1);
Yz = y.signals.values(:,2);
t = y.time;
DA1 = DA.signals.values;
td1 = DA.time;
T = 0.001;
sim('model2',4);
Ys2 = y.signals.values(:,1);
Yz2 = y.signals.values(:,2);
t2 = y.time;
DA2 = DA.signals.values;
td2 = DA.time;

figure(2)
    subplot(211)
        plot(t,Ys,'b--')
        hold on
        plot(t,Yz,'b-')
        plot(t2,Yz2,'b-.')
    subplot(212)
        plot(td1,DA1,'b')
        hold on
        plot(td2,DA2,'b--')

% e lidur
T = 0.4;
K = 2.15249;
sim('model2',4);
Ys = y.signals.values(:,1);
Yz = y.signals.values(:,2);
t = y.time;
DA1 = DA.signals.values;
td1 = DA.time;

figure(2)
    subplot(211)
        hold on
        plot(t,Ys,'m--')
        plot(t,Yz,'m')
    subplot(212)
        hold on
        plot(td1,DA1,'m')

T = 1;
K = 2.15249;
sim('model2',4);
Ys = y.signals.values(:,1);
Yz = y.signals.values(:,2);
t = y.time;
DA1 = DA.signals.values;
td1 = DA.time;

figure(2)
    subplot(211)
        plot(t,Ys,'r')
        hold on
        plot(t,Yz,'r--')
    subplot(212)
        title('Merki frá D/A')
        plot(td1,DA1,'r')
        hold on
```