



HÁSKÓLI ÍSLANDS

Reikniverkefni VIII

Sævar Öfjörð Magnússon

28. nóvember 2005

08.31.04 Merki og kerfi

Jónína Lilja Pálsdóttir

Kafla 10.2 Geómetrísk túlkun á tíðnisvörun í stakrænum tíma

Basic Problems

Í dæmunum hér á eftir munum við vinna með einfalt 2. stigs tíma-stakrænt kerfi með kerfisjöfnuna

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}} \quad (1)$$

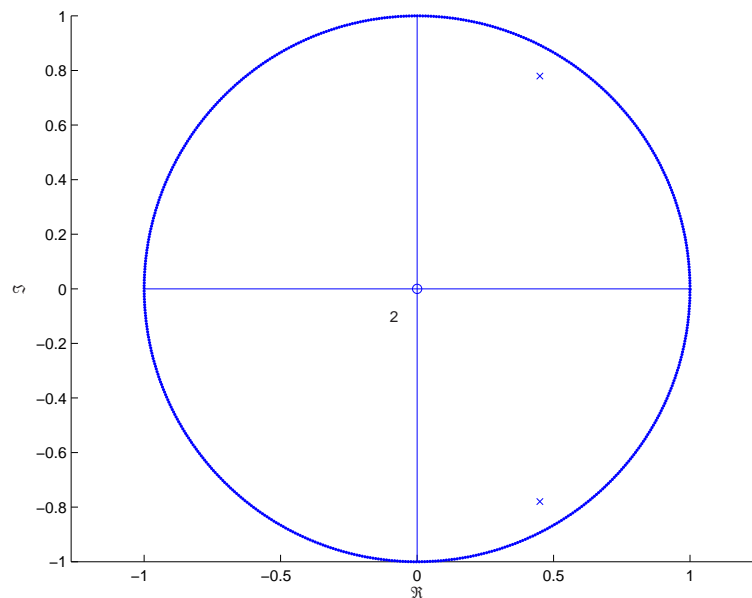
Liður (a)

Dæmi

Skilgreinum $\mathbf{b1}$ og $\mathbf{a1}$ sem vigra sem innihalda stuðla teljara og nefnara $H_1(s)$. Finna og teikna póla og núll fyrir $H_1(z)$.

Lausn

Sjá viðaukann *Matlab kóðar* fyrir nánari lausn. Hér má sjá grafið:



Mynd 1: Pólar og núll fyrir $H_1(z)$.

Liður (b)

Dæmi

Skilgreinum $\omega = [0:511] * \pi / 256$ og $\text{unitcirc} = \exp(j * \omega)$ til þess að fá 512 punkta á einingahringnum með jöfnu bili sem við munum nota til þess að meta tíðnisvörun $H_1(e^{j\omega})$. Skilgreinum polevectors1 sem 2×512 fylki þar sem hver lína inniheldur tvinntölurnar sem fást með því að draga staðsetningu póls frá samsvarandi dálk í unitcirc . Ef ps1 er dálkvigur með staðsetningum póla notum við

```
>>polevectors1=ones(2,1)*unitcirc-ps1*ones(1,512);
```

Notum `abs` og `atan2` til þess að skilgreina `polelength1` og `poleangle1` sem stærð og fasahorn hvers vigurs í `polevectors1`.

Lausn

Sjá viðaukann *Matlab kóðar* fyrir lausn.

Liður (c)

Dæmi

Skilgreinum `zerovectors1` sem 2×512 fylki sem inniheldur vigrana frá núllpunktinum til hvers punkts á `unitcirc`, á sama hátt og í (b)-lið. Skilgreinum `zerolength1` og `zeroangle1` sem stærð og fasa fyrir þessa vigrana.

Lausn

Sjá viðaukann *Matlab kóðar* fyrir lausn.

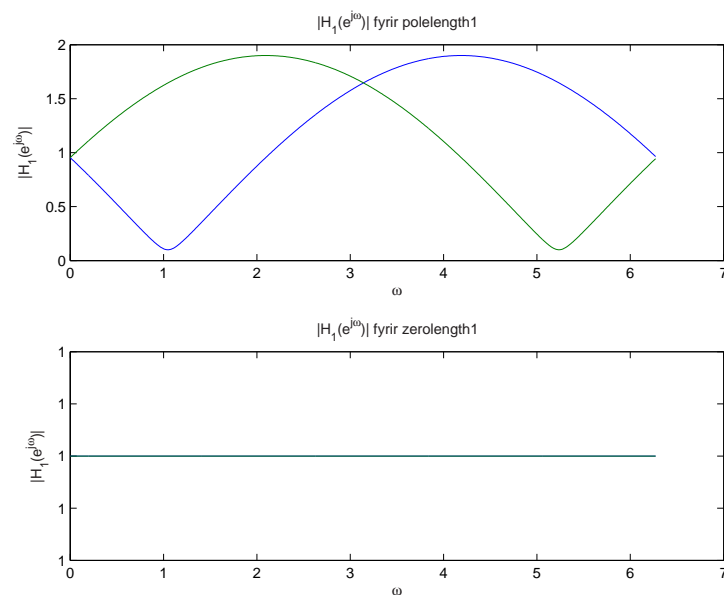
Liður (d)

Dæmi

Teiknum `polelength1` og `zerolength1` sem föll af ω . Með því að skoða þessi gröf, hvar væntum við þess að $|H_1(e^{j\omega})|$ hafi útgildi?

Lausn

Við sjáum á mynd (2) að útgildin eru þegar $\omega \approx 1.1$ og $\omega \approx 5.2$.



Mynd 2: $|H_1(e^{j\omega})|$ sem fall af ω .

Liður (e)

Dæmi

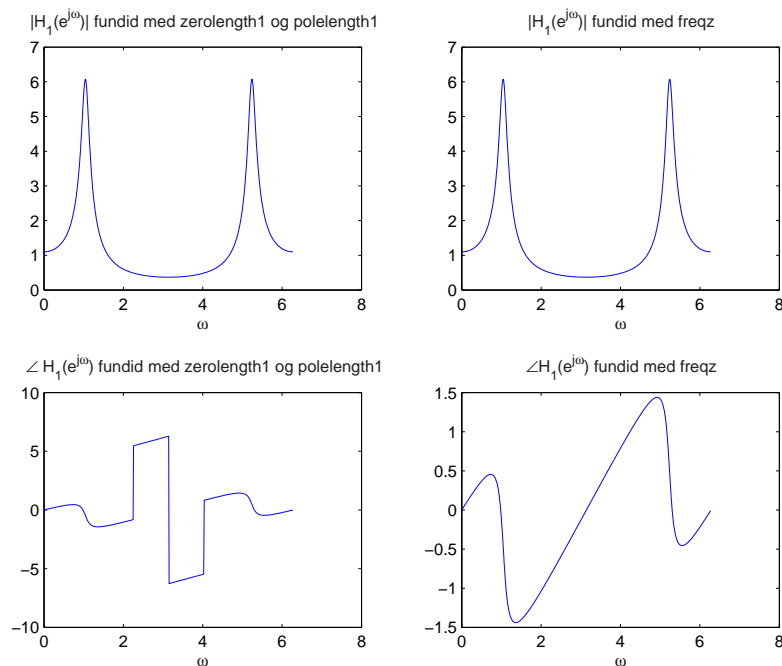
Notum `polelength1` og `zerolength1` til að reikna $|H_1(e^{j\omega})|$ og geymu útkomuna í `geomH1mag`. Notum `poleangle1` og `zeroangle1` til að reikna $\angle H_1(e^{j\omega})$ og geymum útkomuna í `geomH1phase`. Teiknum stærðina og fasann sem við fundum með geómetrískum aðferðum og berum saman við það sem við finnum með

```
>>H1 = freqz(b1,a1,512,'whole');
```

Var mat okkar á útgildatíðnum í (d)-lið rétt?

Lausn

Við sjáum á mynd (3) að mat okkar var rétt, útslagið er mest þegar $\omega \approx 1.1$ og $\omega \approx 5.2$. Það bendir til þess að aðferðin okkar er góð og gild til þess að reikna útslag kerfisins. Hins vegar sjáum við að fasarnir eru mjög ólíkir. Þannig að hvor aðferð leiðir til mismunandi niðurstöðu.



Mynd 3: Stærð og fasi $H_1(e^{j\omega})$ með ýmsum aðferðum.

Intermediate Problems

Í næstu þremur dæmum munum við athuga hvaða áhrif það hefur að færa eitt af núllum $H_1(z)$. Notumst við kerfisjöfnuna

$$H_2(z) = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}, \quad |z| > 0.9. \quad (2)$$

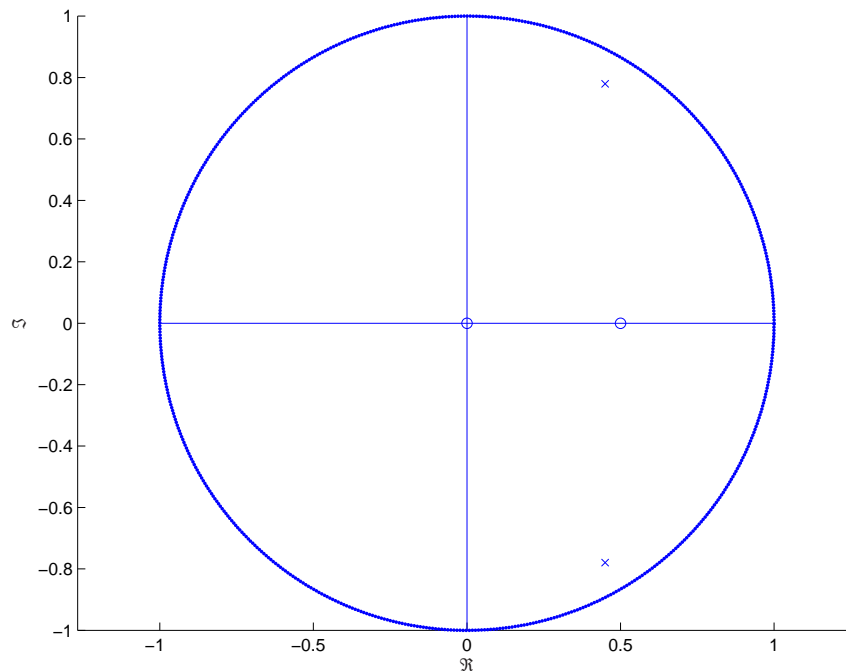
Liður (f)

Dæmi

Finnum og teiknum póla og núll $H_2(z)$. Hvernig væntum við þess að polevectors2 eða zerovectors2 fyrir þetta kerfi verði frábrugðnir þeim sem voru fyrir $H_1(z)$?

Lausn

Á mynd (4) má sjá pólana og núllin. Skoðum ræturnar sem við fengum í (d)- og (f)-lið:



Mynd 4: Pólar og núll $H_2(z)$.

Þar sem nefnararnir í $H_1(z)$ og $H_2(z)$ er eðlilegt að pólarnir séu eins. Þá ætti útslagskúrfan

Tafla 1: Rætur í (d)- og (f)-lið.

Liður	Núll	Pólar
(d)	0	$0.45 + 0.7794i$
	0	$0.45 - 0.7794i$
(f)	0	$0.45 + 0.7794i$
	0.5	$0.45 - 0.7794i$

að vera sú sama í báðum liðum. Í (f)-lið hefur annað núllið breyst svo við ættum að fá mismunandi kúrfur í hvorum lið fyrir sig. Það er svolítið erfitt að átta sig á því hvernig fasakúrfan mun breytast, en við vitum að minnsta kosti að hornið sem nýja núllið er að mynda við einingahringinn er að breytast vegna þess að núllið hefur hliðrast um 0.5.

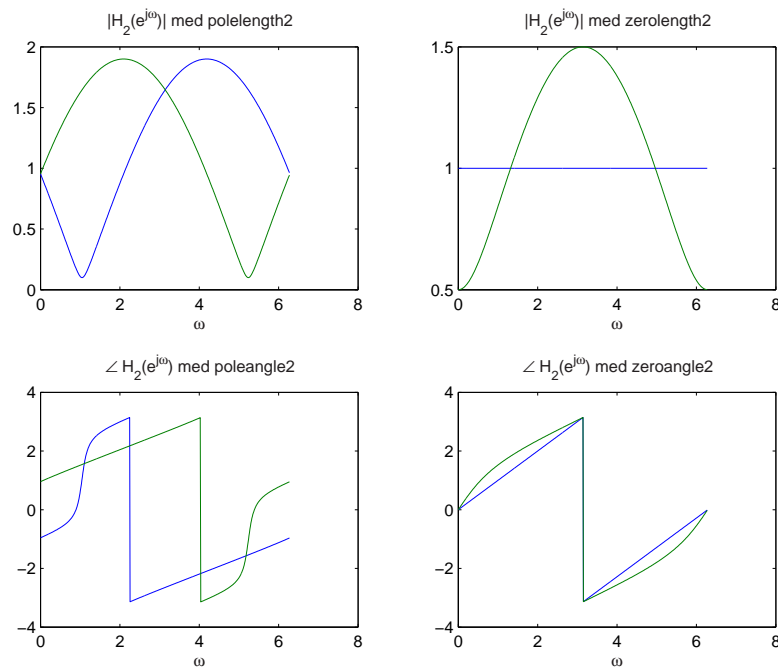
Liður (g)

Dæmi

Reiknum polevectors2 og zerovectors2 fyrir $H_2(z)$, einnig stærðir og fasahorn fyrir alla vigrana. Teiknum stærðir og fasa sem föll af ω . Voru spár okkar í (f)-lið réttar?

Lausn

Sjáum á mynd(5) að útslag hefur ekki breyst en fasinn breyttist. Svo við spáðum nokkurn veginn réttu í (f)-lið.



Mynd 5: Stærðir og fasar $H_2(z)$ sem föll af ω .

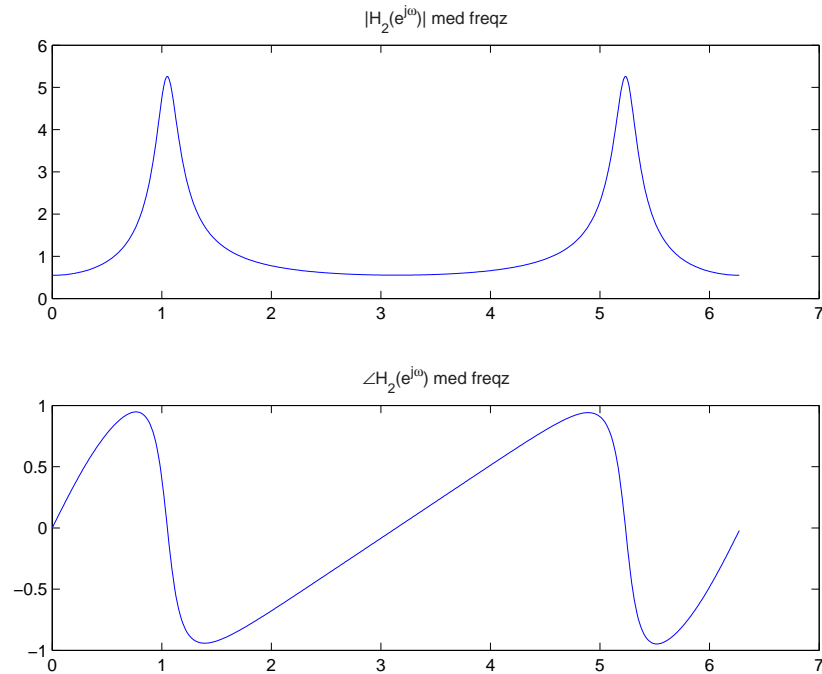
Liður (h)

Dæmi

Með því að taka tillit til breytinga á núllunum eigum við að spá fyrir um hvernig $H_2(e^{j\omega})$ muni verða frábrugðið $H_1(e^{j\omega})$. Reiknum H2 með freqz til þess að staðfesta svarið.

Lausn

Teiknum upp tíðnisvörunina sem við fengum með freqz:



Mynd 6: Stærð og fasi tíðnisvörunar $H_2(e^{j\omega})$.

Sjáum að útslagið hefur ekkert breyst en nú er fasakúrfan búin að jafna útgildi sín út, þ.e. mesta útslag hennar er ± 1 , í stað 0.5 og 1.5 áður.

Í næstu þremur dæmum munum við notast við kerfisjöfnuna

$$H_3(z) = \frac{0.25 - (\text{sqrt}(3)/2)z^{-1} + z^{-2}}{1 - (\sqrt{3}/2)z^{-1} + 0.25z^{-2}}, \quad |z| > 0.5. \quad (3)$$

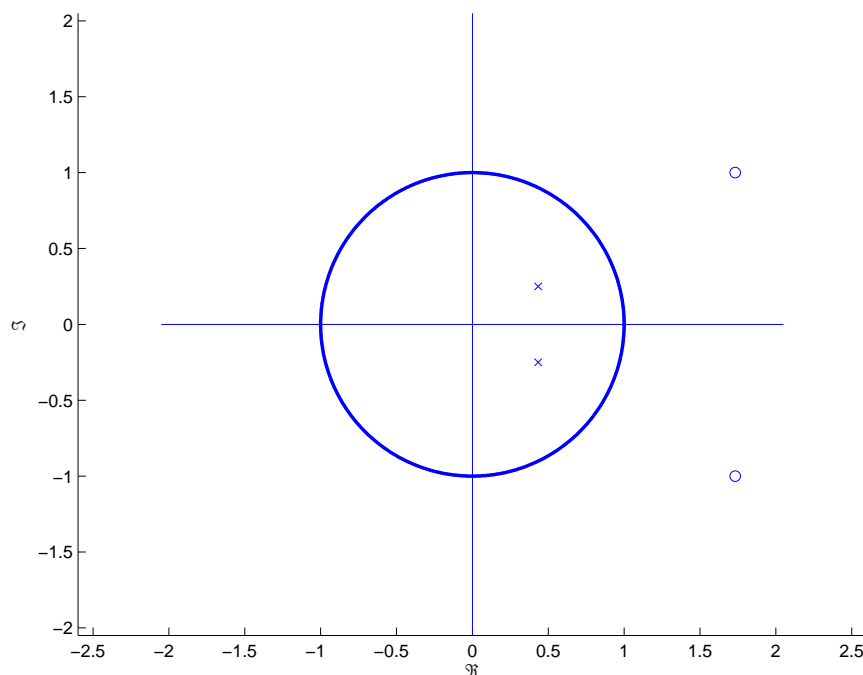
Liður (i)

Dæmi

Finnum og teiknum póla og núll fyrir $H_3(e^{j\omega})$. Hvernig eru núllin og pólarnir tengd?

Lausn

Teiknum upp póla og núll á mynd (7):



Mynd 7: Pólar og núll fyrir $H_3(e^{j\omega})$.

Við sjáum á myndinni að annað parið af núlli og pól er sama og hitt parið, speglað um raunás plansins.

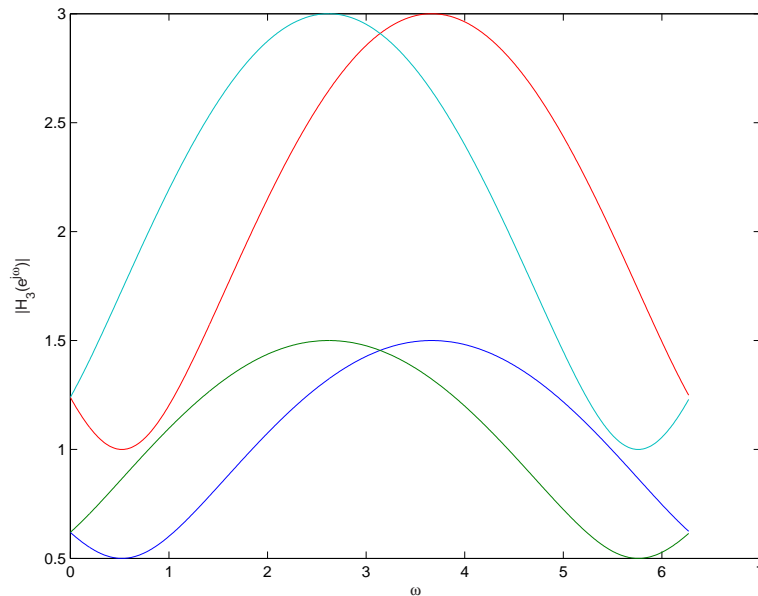
Liður (j)

Dæmi

Skilgreinum `polevectors3`, `zerovectors3`, `polelength3` og `zerolength` á sama hátt og í *Basic Problems*. Teiknum stærðirnar, þ.e. stærð hvernar línu í `polelength3` og `zerolength3` á sama graf. Hvernig eru stærðirnar tengdar? Getum við fundið út frá því hvernig stærð tíðnisvörunarinnar breytist með tíðni? Notum þessar stærðir til þess að reikna stærð tíðnisvörunarinnar og geymum í `geomH3mag`. Teiknum `geomH3mag` sem fall af ω .

Lausn

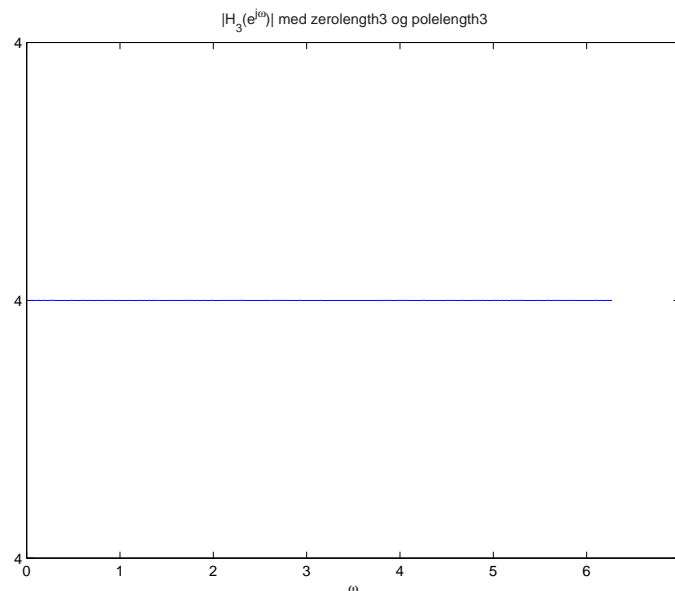
Teiknum fyrst allar stærðirnar á sama graf:



Mynd 8: Stærðir bæði fyrir *polelength3* og *zerolength3* sem föll af ω .

Sjáum á mynd (8) að stærðirnar eru svipaðar í laginu, en hvor vigur hefur mismunandi útslag. Þá ætti $|H_3(e^{j\omega})|$ ekki að breytast neitt með tíðni.

Teiknum svo *geomH3mag*:



Mynd 9: Vigurinn *geomH3mag* sem fall af ω .

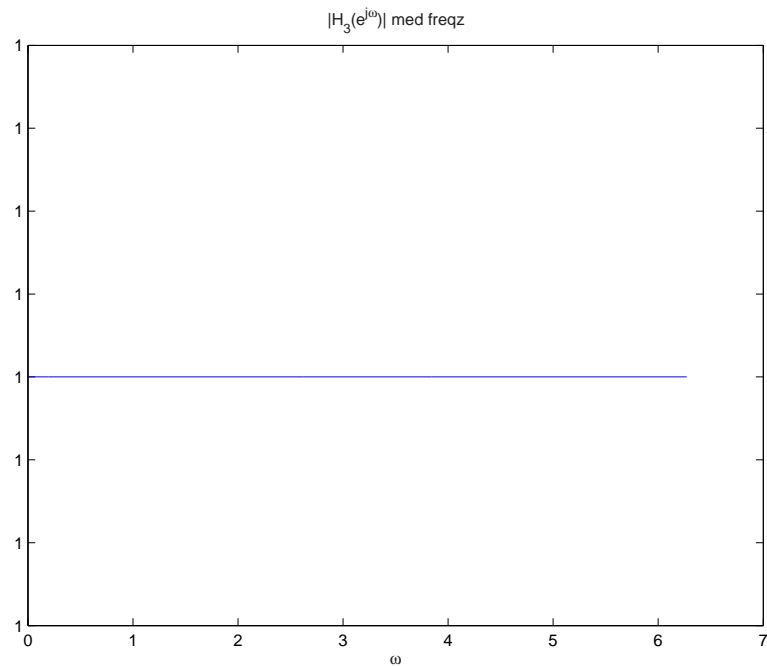
Sjáum á mynd (9) að stærðin hefur ekkert útslag og breytist stærðin því ekkert með tíðni.

Liður (k)**Dæmi**

Reiknum H_3 með `freqz` og staðfestum svarið úr (j)-lið.

Lausn

Teiknum stærðina á H_3 :



Mynd 10: Stærð tíðnisvörunar $H_3(e^{j\omega})$.

Sjáum að (j)-liður stenst, útslagið er ekkert og breytist útslag merkisins ekkert með tíðni.

MATLAB kóðar

Kaffi 10.2

```
1 % Reikniverkefni 8
2 % 27. november 2005
3 % Saevar Ofjord Magnusson
4
5 clear all
6 close all
7 format long
8
9 % a-lidur
10 b1=[1 0 0];
11 a1=[1 -.9 0.81];
12 zsl=roots(b1)
13 ps1=roots(a1)
14
15 figure(1)
16 dpzplot(b1,a1)
17 print -depsc rv08_1
18
19 % b-lidur
20 omega=[0:511]*pi/256;
21 unitcirc=exp(j*omega);
22 polevectors1=ones(2,1)*unitcirc-ps1*ones(1,512);
23
24 polelength1=abs(polevectors1);
25 poleangle1=atan2(imag(polevectors1),real(polevectors1));
26
27 % c-lidur
28 zerovectors1=ones(2,1)*unitcirc-zs1*ones(1,512);
29
30 zerolength1=abs(zerovectors1);
31 zeroangle1=atan2(imag(zerovectors1),real(zerovectors1));
32
33 % d-lidur
34 figure(2)
35 subplot(2,1,1);
36 plot(omega,polelength1);
37 xlabel('\omega');
38 ylabel('|H_1(e^{j\omega})|');
39 title('|H_1(e^{j\omega})| fyrir polelength1')
40
41 subplot(2,1,2);
42 plot(omega,zerolength1);
43 xlabel('\omega');
44 ylabel('|H_1(e^{j\omega})|');
45 title('|H_1(e^{j\omega})| fyrir zerolength1')
46
```

```

47 print -depsec rv08_2
48
49 % e-lidur
50 geomH1mag=prod(zerolength1, 1)./prod(polelength1, 1);
51 geomH1phase=sum(zeroangle1, 1)-sum(poleangle1, 1);
52
53 H1=freqz(b1, a1, 512, 'whole');
54
55 figure(3)
56 subplot(2, 2, 1);
57 plot(omega, geomH1mag);
58 xlabel('\omega');
59 title('|H_1(e^{j\omega})|_fundid_med_zerolength1_log_polelength1');
60
61 subplot(2, 2, 2);
62 plot(omega, abs(H1));
63 xlabel('\omega');
64 title('|H_1(e^{j\omega})|_fundid_med_freqz');
65
66 subplot(2, 2, 3);
67 plot(omega, geomH1phase);
68 xlabel('\omega');
69 title('\angle_H_1(e^{j\omega})_fundid_med_zerolength1_log_polelength1');
70
71 subplot(2, 2, 4);
72 plot(omega, angle(H1));
73 xlabel('\omega');
74 title('\angle_H_1(e^{j\omega})_fundid_med_freqz');
75
76 print -depsec rv08_3
77
78 % f-lidur
79 b2=[1 -0.5 0];
80 a2=[1 -0.9 0.81];
81 zs2=roots(b2);
82 ps2=roots(a2);
83
84 figure(4)
85 dpzplot(b2, a2);
86 print -depsec rv08_4
87
88 % g-lidur
89
90 polevectors2=ones(2,1)*unitcirc-ps2*ones(1,512);
91 polelength2=abs(polevectors2);
92 poleangle2=atan2(imag(polevectors2), real(polevectors2));
93 zerovectors2=ones(2,1)*unitcirc-zs2*ones(1,512);
94 zerolength2=abs(zerovectors2);
95 zeroangle2=atan2(imag(zerovectors2), real(zerovectors2));
96

```

```

97 figure(5)
98 subplot(2, 2, 1);
99 plot(omega, polelength2);
100 xlabel('\omega');
101 title('|H_2(e^{j\omega})|_med_polelength2');
102 subplot(2, 2, 2);
103 plot(omega, zerolength2);
104 xlabel('\omega');
105 title('|H_2(e^{j\omega})|_med_zerolength2');
106 subplot(2, 2, 3);
107 plot(omega, poleangle2);
108 xlabel('\omega');
109 title('\angle_H_2(e^{j\omega})_med_poleangle2');
110 subplot(2, 2, 4);
111 plot(omega, zeroangle2);
112 xlabel('\omega');
113 title('\angle_H_2(e^{j\omega})_med_zeroangle2');
114 print -depsc rv08_5
115
116 % h-lidur
117 H2 = freqz(b2, a2, 512, 'whole');
118
119 figure(6)
120 subplot(2, 1, 1);
121 plot(omega, abs(H2));
122 title('|H_2(e^{j\omega})|_med_freqz');
123
124 subplot(2, 1, 2);
125 plot(omega, angle(H2));
126 title('\angleH_2(e^{j\omega})_med_freqz');
127
128 print -depsc rv08_6
129
130 % i-lidur
131
132 b3=[0.25 -sqrt(3)/2 1];
133 a3=[1 -sqrt(3)/2 0.25];
134
135 zs3=roots(b3);
136 ps3=roots(a3);
137
138 figure(7)
139 dpzplot(b3, a3)
140 xlabel('\Re');
141 ylabel('\Im');
142 print -depsc rv08_7
143
144 % j-lidur
145
146 polevectors3=ones(2,1)*unitcirc-ps3*ones(1,512);

```

```
147 polelength3=abs(polevectors3);
148 poleangle3=atan2(imag(polevectors3),real(polevectors3));
149 zerovectors3=ones(2,1)*unitcirc-zs3*ones(1,512);
150 zerolength3=abs(zerovectors3);
151 zeroangle3=atan2(imag(zerovectors3),real(zerovectors3));
152
153 figure(8)
154 plot(omega,polelength3,omega,zerolength3);
155 xlabel('\omega')
156 ylabel('|H_3(e^{j\omega})|')
157
158 print -depsc rv08_8
159
160 geomH3mag=prod(zerolength3,1)./prod(polelength3,1);
161
162 figure(9)
163 plot(omega,geomH3mag);
164 xlabel('\omega');
165 title('|H_3(e^{j\omega})|_med_zerolength3_og_polelength3');
166
167 print -depsc rv08_9
168
169 % k-lidur
170 H3 = freqz(b3, a3, 512, 'whole');
171
172 figure(10)
173 plot(omega,abs(H3));
174 title('|H_3(e^{j\omega})|_med_freqz');
175 xlabel('\omega')
176
177 print -depsc rv08_10
```