



HÁSKÓLI ÍSLANDS

Reikniverkefni VII

Sævar Öfjörð Magnússon

22. nóvember 2005

08.31.04 Merki og kerfi

Jónína Lilja Pálsdóttir

Pólar 2. stigs kerfa

Í þessum kafla vinnum við með 2. stigs kerfi á forminu

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (1)$$

Nánar tiltekið ætlum við að rannsaka hvernig staðsetningar póla breytast eftir því sem dempunarstuðullinn ζ og ódempaða náttúrulega tíðnin ω_n breytast. Við skoðum einnig hvernig tíðnisvörðun kerfisins breytist eftir staðsetningu póla.

Basic Problems

Í þessum dæmum munum við rannsaka staðsetningu póla og tíðnisvörðun kerfis fyrir fjögur mismunandi gildi á ζ á meðan gildi ω_n er haldið föstu í 1.

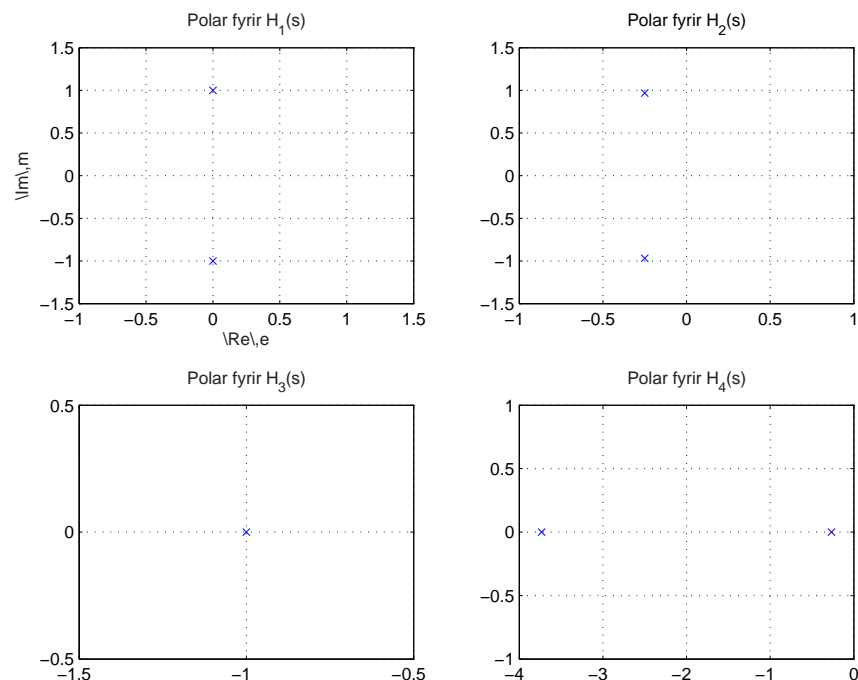
Liður (a)

Dæmi

Eigum að skilgreina $H_1(s)$ upp í $H_4(s)$ til þess að vera kerfi sem við fáum þegar við festum $\omega_n = 1$ í jöfnu 1 á meðan ζ er 0, 1/4, 1, og 2. Skilgreinum stuðlavigna **a1** til **a4** fyrir nefnara $H_1(s)$ til $H_4(s)$. Finna svo og teikna póla hvers kerfis.

Lausn

Á mynd (1) sjáum við staðsetningu póla fyrir kerfin fjögur:



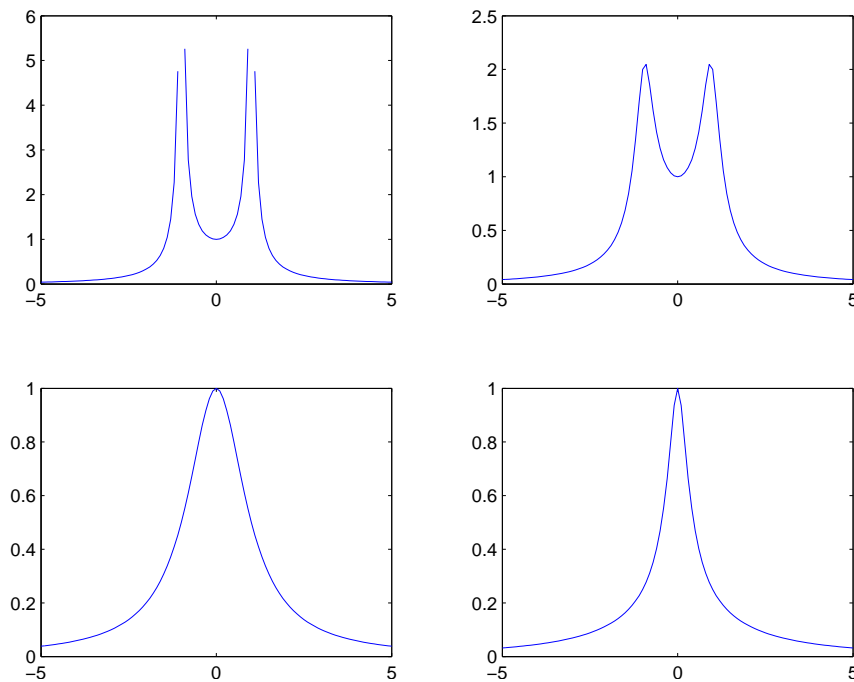
Mynd 1: Pólar kerfanna $H_1(s)$ til $H_4(s)$.

Liður (b)

Dæmi

Hér eigum við að skilgreina vigurinn $\omega = [-5:0.1:5]$ sem þær tíðnir sem við viljum reikna tíðnisvörðun fyrir. Notum `freqs` til þess að reikna og teikna $|H(j\omega)|$ fyrir öll fjögur kerfin úr (a)-lið. Hvernig eru tíðnisvaranirnar fyrir $\zeta < 1$ frábrugðnar þeim sem eru fyrir $\zeta \geq 1$? Getum við útskýrt hvernig staðsetningar póllanna valda þessum mun á tíðnisvörðunum? Einnig, hvers vegna er $H(j\omega)|_{\omega=0}$ eins fyrir öll kerfin?

Lausn



Mynd 2: Stærðir tíðnisvarana fyrir kerfin fjögur.

Sjáum þegar við berum mynd (1) saman við mynd (??) að þegar $\zeta < 1$ höfum við tvo tvíntalnapóla. Þá fáum við tvo toppa hvorn sínu megin við núllið á raunásnum. Þegar $\zeta \rightarrow 0$ stefnir hæð toppanna á ∞ . Fyrir $\zeta \geq 1$ höfum við eingöngu raungilda póla og fáum bara einn topp við núllið. Þegar ζ stækkar mjókkar toppurinn. Við sjáum líka að gröfin skera öll lóðrétta ásinn í gildinu 1. Það er einfalt að sjá að þegar við stingum gildunum $s = j\omega = 0$ og $\omega_n = 1$ inn í jöfnu (1) fáum við $H(j\omega) = 1$.

Intermediate Problems

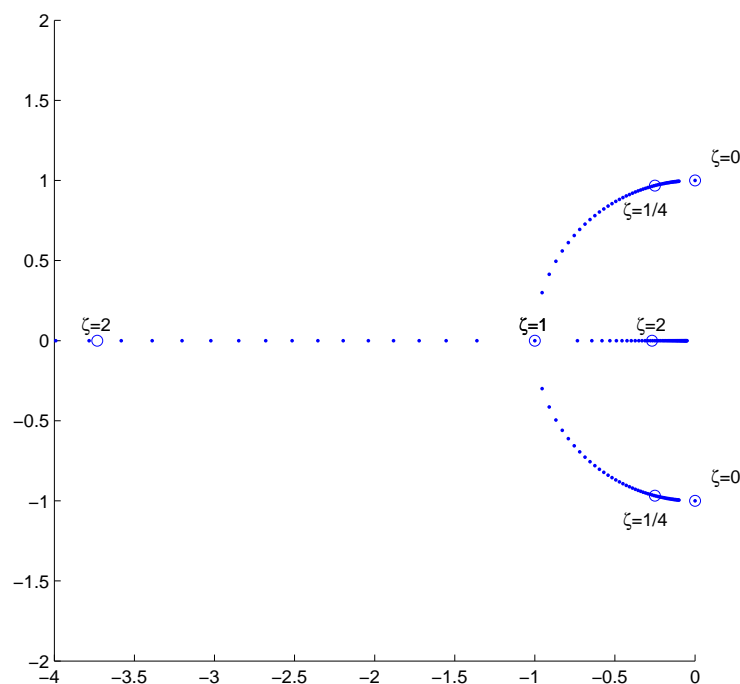
Í þessum dæmum skoðum við ferlana sem pólarinn myndast þegar við breytum gildunum á ζ og ω_n , og skoðum hvernig tíðnisvörðun kerfisins breytist þegar við breytum þessum gildum.

Liður (c)

Dæmi

Fyrst látum við ζ hlaupa yfir bilið $0 \leq \zeta \leq 10$ á meðan við höldum ω_n föstu í gildinu 1. Teiknum á eitt graf raunhluta og þverhluta pólanna sem myndast þegar við breytum ζ . Merkjum inn punktana $\zeta = 0, 1/4, 1$ og 2 . Reynum að lýsa því hvernig við höldum að tíðnisvörðunin breytist þegar ζ fer frá 0 upp í 1 og svo frá 1 upp í 10.

Lausn



Mynd 3: Pólar fyrir $0 \leq \zeta \leq 10$ og $\omega_n = 1$.

Á mynd (??) sjáum við grafið með pólunum. Þegar $0 < \zeta < 1$ fáum við alltaf tvo samoka tvinnþölupóla sem raða sér á einingahringinn. Þegar $\zeta \rightarrow 1^-$ eykst fjarlægðin milli pólanna, sennilega vegna þess að gildin á ζ aukast logaritmískt. Þegar $1 < \zeta < 10$ fáum við tvo raungilda póla. Bilið milli þeirra er minnst við $\zeta = 1^-$ og eykst þegar ζ stækkar. Í $\zeta = 1$ höfum við svo tvöfaldan raungildan pól, nákvæmlega á einingahringnum. Sjá viðaukann *Matlab kóðar* fyrir nánari lausn.

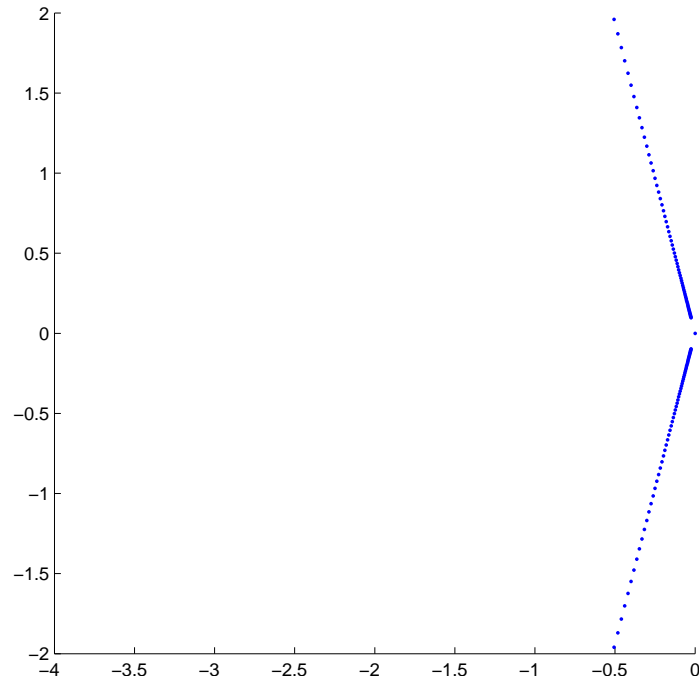
Liður (d)

Dæmi

Nú festum við ζ í gildinu $1/4$ og athugum hvað gerist þegar við aukum ω_n frá 0 upp í 10. Teiknum á eitt graf raunhluta og þverhluta pólanna sem myndast þegar við breyta ω_n . Hvernig væntum við þess að breytingar á ω_n breyti tíðnisvörðun $H(j\omega)$? Notum freq̄s til þess að meta tíðnisvörðunina þegar $\omega_n = 2$ og $\zeta = 1/4$ og teiknum upp stærð hennar. Berum þetta saman við grafið úr (b)-lið fyrir $\omega_n = 1$ og $\zeta = 1/4$. Hver er munurinn á

þeim? Passar þetta við það sem við væntum úr grafinu fyrir ferlana sem mynduðust þegar ω_n hljóp frá 0 upp í 10?

Lausn



Mynd 4: Pólar fyrir $0 \leq \omega_n \leq 10$ og $\zeta = 1/4$.

Sjáum á mynd (??) að eftir því sem ω_n stækkar stækka þverhlutar pólanna einnig. Sjá viðaukann *Matlab kóðar* fyrir nánari lausn.

MATLAB kóðar

Kaffi 9.2

```
1 % reikniverkefni 7
2 % 21. november 2005
3 % Saevar Ofjord Magnusson
4
5 clear all
6 close all
7
8 % a-lidur
9 a1 = [1 0 1];
10 a2 = [1 0.5 1];
11 a3 = [1 2 1];
12 a4 = [1 4 1];
13
14 ps1 = roots(a1);
15 ps2 = roots(a2);
16 ps3 = roots(a3);
17 ps4 = roots(a4);
18
19 figure(1)
20 subplot(2,2,1)
21 plot(real(ps1),imag(ps1),'x')
22 axis([-1 1.5 -1.5 1.5])
23 title('Polar_fyrir_H_1(s)')
24 xlabel('\Re\,e')
25 ylabel('\Im\,m')
26 grid
27 subplot(2,2,2)
28 plot(real(ps2),imag(ps2),'x')
29 axis([-1 1 -1.5 1.5])
30 title('Polar_fyrir_H_2(s)')
31 grid
32 subplot(2,2,3)
33 plot(real(ps3),imag(ps3),'x')
34 axis([-1.5 -0.5 -0.5 0.5])
35 title('Polar_fyrir_H_3(s)')
36 grid
37 subplot(2,2,4)
38 plot(real(ps4),imag(ps4),'x')
39 axis([-4 0 -1 1])
40 title('Polar_fyrir_H_4(s)')
41 grid
42
43 print -depsc rv07_1
44
45 % b-lidur
46
```

```

47 omega = [-5:0.1:5];
48 H1 = abs(freqls(1, a1, omega));
49 H2 = abs(freqls(1, a2, omega));
50 H3 = abs(freqls(1, a3, omega));
51 H4 = abs(freqls(1, a4, omega));
52
53 figure(2)
54 subplot(2,2,1)
55 plot(omega, H1)
56 subplot(2,2,2)
57 plot(omega, H2)
58 subplot(2,2,3)
59 plot(omega, H3)
60 subplot(2,2,4)
61 plot(omega, H4)
62
63 print -depsc rv07_2
64
65 % c-lidur
66 zetarange = [0 logspace(-1, 1, 99)];
67 azeta = [ones(1, 100); 2*zetarange; ones(1, 100)];
68 zetapoles = zeros(2, 100);
69 for j=1:100
70     zetapoles(:, j) = roots(azeta(:, j));
71 end
72
73 figure(3)
74 hold on
75 for j=1:100
76     plot(real(zetapoles(:, j)), imag(zetapoles(:, j)), 'o')
77 end
78 plot(real(ps1), imag(ps1), 'o')
79 plot(real(ps2), imag(ps2), 'o')
80 plot(real(ps3), imag(ps3), 'o')
81 plot(real(ps4), imag(ps4), 'o')
82
83 text(real(ps1)+0.1, imag(ps1)+0.15, '\zeta=0')
84 text(real(ps2)-0.2, imag(ps2)-0.15, '\zeta=1/4')
85 text(real(ps3)-0.1, imag(ps3)+0.1, '\zeta=1')
86 text(real(ps4)-0.1, imag(ps4)+0.1, '\zeta=2')
87
88 axis('equal')
89 axis([-4 0 -2 2])
90
91 print -depsc rv07_3
92
93 % d-lidur
94 omegarange = [0 logspace(-1, 1, 99)];
95 aomega = [ones(1, 100); 2*0.25*omegarange; omegarange.^2];
96 omegapoles = zeros(2, 100);

```

```
97 for j=1:100
98     omegapoles(:,j) = roots(aomega(:,j));
99 end
100
101 figure(4)
102 hold on
103 for j=1:100
104     plot(real(omegapoles(:,j)),imag(omegapoles(:,j)),'.')
105 end
106 axis('equal')
107 axis([-4 0 -2 2])
108
109 print -depsc rv07_4
110
111 % finna tidnisvorun
112 Hw1 = abs(freqls(4,[1 2*2*0.25 4],omega));
113 figure(5)
114 subplot(1,2,1)
115 plot(omega,Hw1)
116 subplot(1,2,2)
117 plot(omega,H2)
118
119 print -depsc rv07_5
120
121 % e-lidur
122
123 zetarange2=[-logspace(1,-1,99) 0];
124 azeta2 = [ones(1,100); 2*zetarange2; ones(1,100)];
125 zetapoles2 = zeros(2,100);
126 for j=1:100
127     zetapoles2(:,j) = roots(azeta2(:,j));
128 end
129
130 figure(6)
131 hold on
132 for j=1:100
133     plot(real(zetapoles2(:,j)),imag(zetapoles2(:,j)),'.')
134 end
135
136 axis('equal')
137 axis([0 4 -2 2])
138
139 print -depsc rv07_6
140
141 % finna tidnisvorun
142 Hw2 = abs(freqls(1,[1 2*1*(-0.25) 1],omega));
143 figure(7)
144 subplot(1,2,1)
145 plot(omega,Hw2)
146 subplot(1,2,2)
```

```
147 plot(omega, H2)
148
149 print -depsc rv07_7
```