



**HÁSKÓLI ÍSLANDS**

Reikniverkefni I

Sævar Öfjörð Magnússon

21. nóvember 2005

## Kaflí 1.2

### Liður (a)

#### Dæmi

Við höfum stakræna merkið

$$x_M[n] = \sin\left(\frac{2\pi Mn}{N}\right),$$

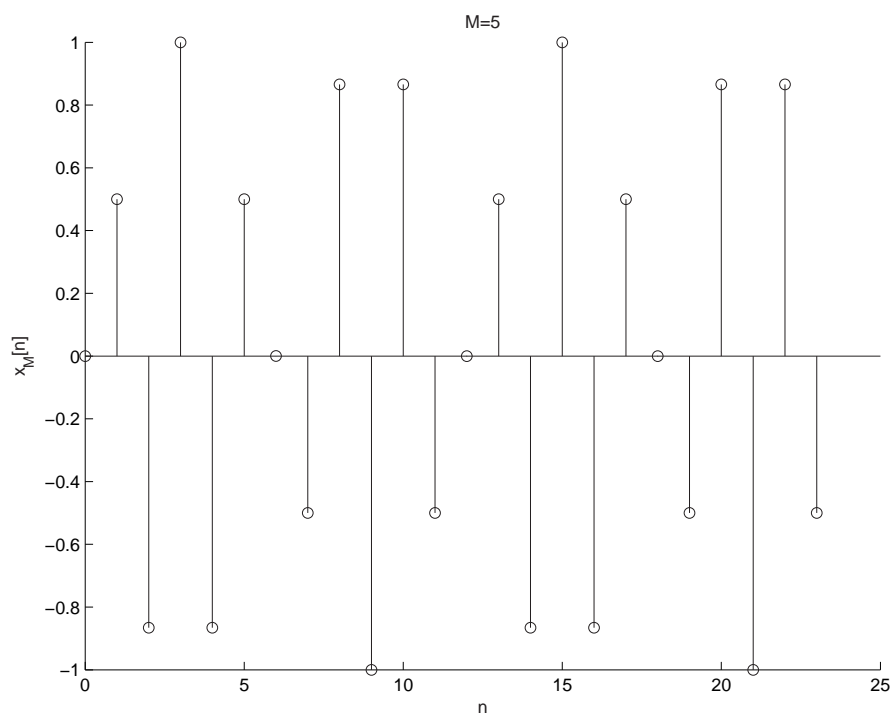
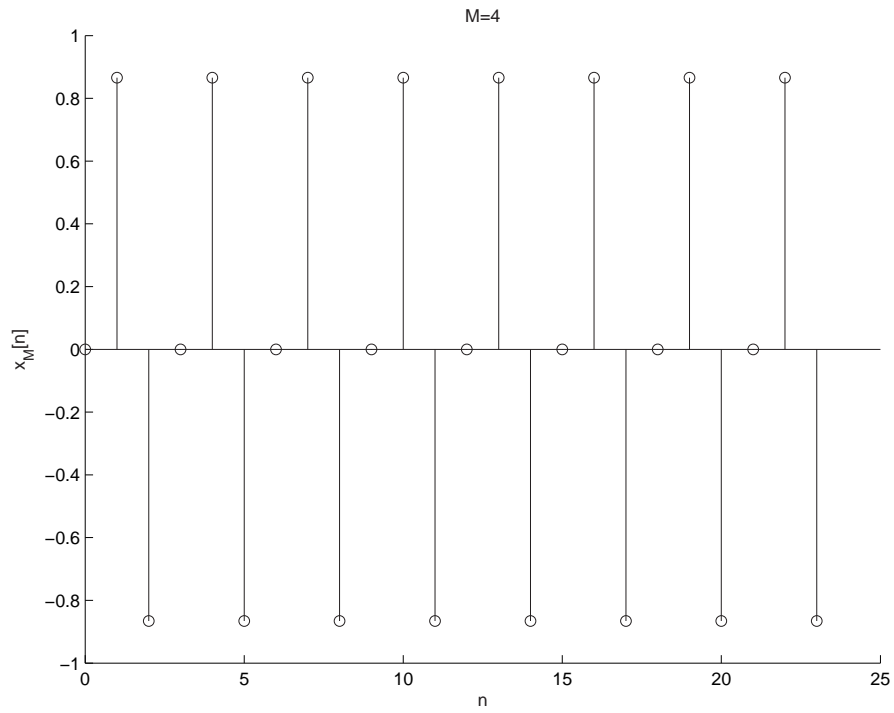
og setjum  $N = 12$ . Fyrir  $M = 4, 5, 7$  og  $10$ , eigum við að teikna  $x_M[n]$  á bilinu  $0 \leq n \leq 2N - 1$ . Notum stem til þess að búa til gröfin, og merkjum ásana rétt. Hver er grunnlota hvers merkis? Hvernig ákveðum við grunnlotuna almennt út frá gildum á  $M$  og  $N$ ? Einnig þegar  $M > N$ .

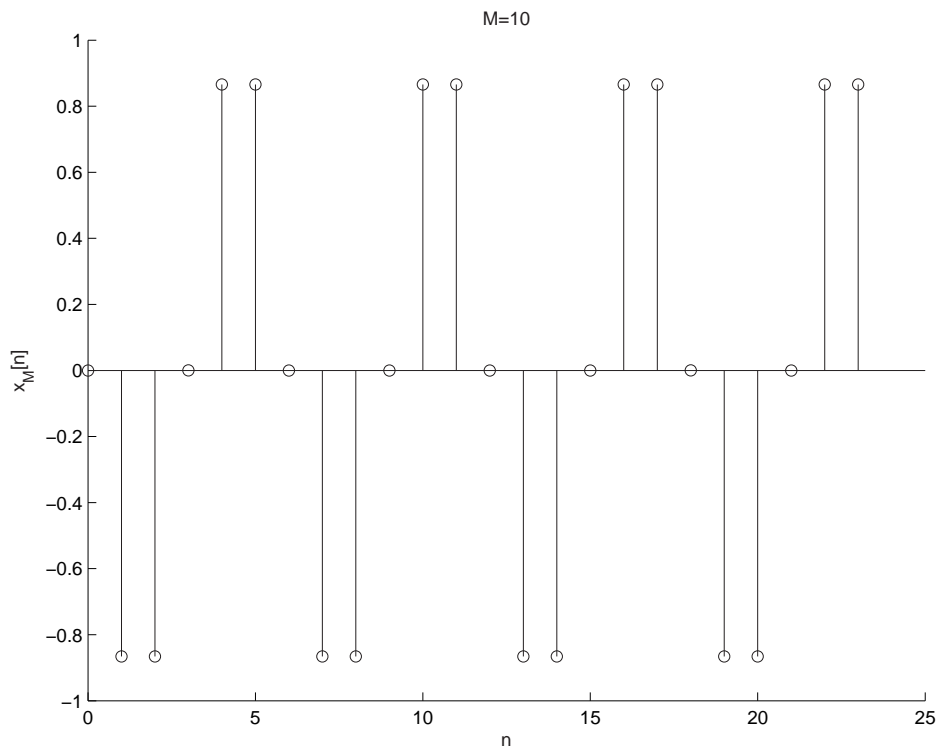
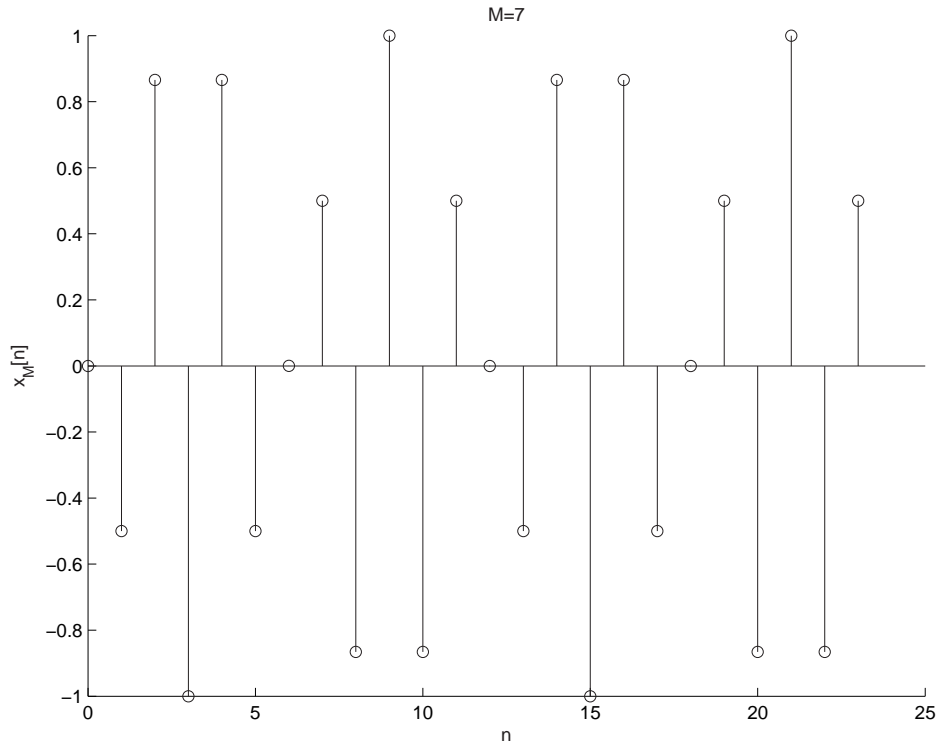
#### Lausn

Almennt er lotu merkjanna lýst með  $\frac{MK}{N}$  þar sem  $K \in \mathbb{Z}$  er talan sem þarf að margfalda brotið með til þess að fá út heiltölu. Talan  $K$  er þá enn fremur grunnlota merkisins. Fyrir merkin fjögur sem við erum beðin um að teikna upp eru grunnloturnar eftirfarandi:

M	Grunnlota K
4	3
5	12
7	12
10	6

Teiknum svo upp merkin:





## Liður (b)

## Dæmi

Höfum merkið

$$x_k[n] = \sin(\omega_k n),$$

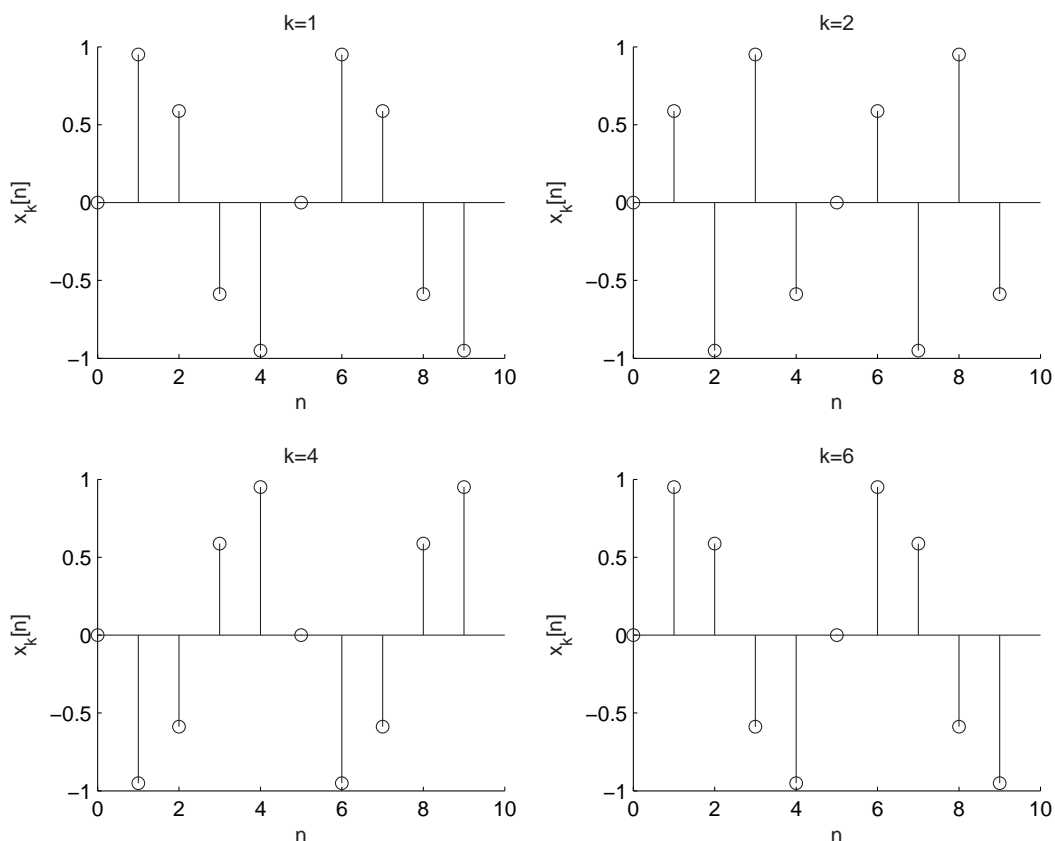
þar sem  $\omega_k = 2\pi k/5$ . Fyrir  $x_k[n]$  með  $k = 1, 2, 4$  og  $5$  notum við stem til að teikna hvert merki á bilinu  $0 \leq n \leq 9$ . Öll merkin eiga að teiknast með sér ása í sömu myndinni með subplot. Hversu mörg merki höfum við teiknað? Ef tvö merki eru eins, útskýrum hvernig mismunandi gildi á  $\omega_k$  geta gefið sama merkið.

## Lausn

Við sjáum af myndunum hér að neðan að við fáum einungis þrjú ólík merki. Fyrsta grafið er það sama og það síðasta. Skoðum hvernig þetta getur gerst. Við höfum jöfnu á bls. 28 í *Oppenheim og Willsky* sem er

$$N_0 = m \left( \frac{2\pi}{\omega_0} \right).$$

Okkar tíðni er  $\omega_k = \frac{2\pi k}{5}$  og við setjum  $\omega_0 = \omega_k$ . Þá sjáum við að fyrir ákveðin gildi  $k$  geta tvö merki haft sömu grunnlotu.



## Liður (c)

## Dæmi

Höfum nú eftirfarandi þrjú merki:

$$\begin{aligned}x_1[n] &= \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 2\cos\left(\frac{3\pi n}{N}\right), \\x_2[n] &= 2\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + \cos\left(\frac{3\pi n}{N}\right), \\x_3[n] &= \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 3\cos\left(\frac{5\pi n}{2N}\right).\end{aligned}$$

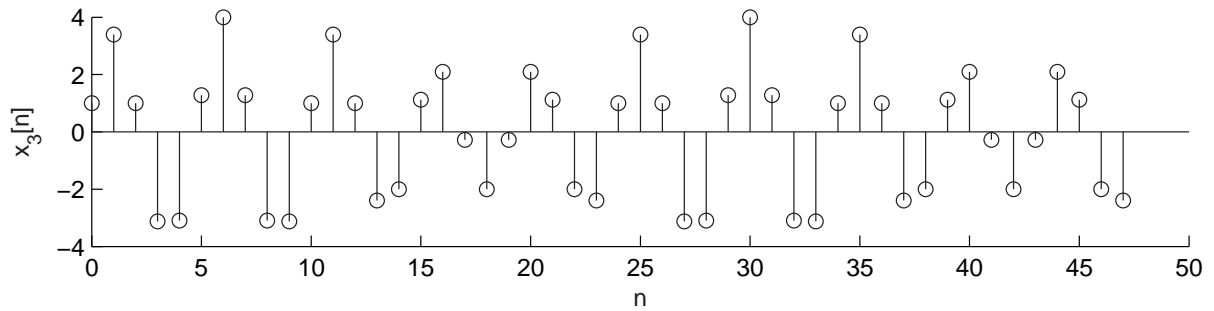
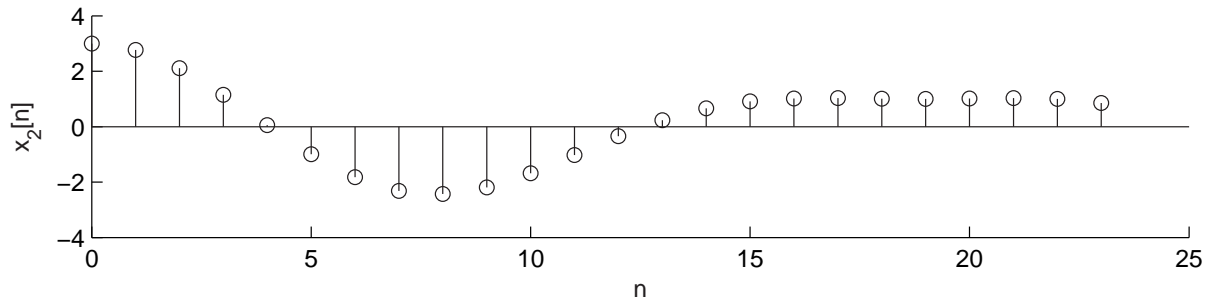
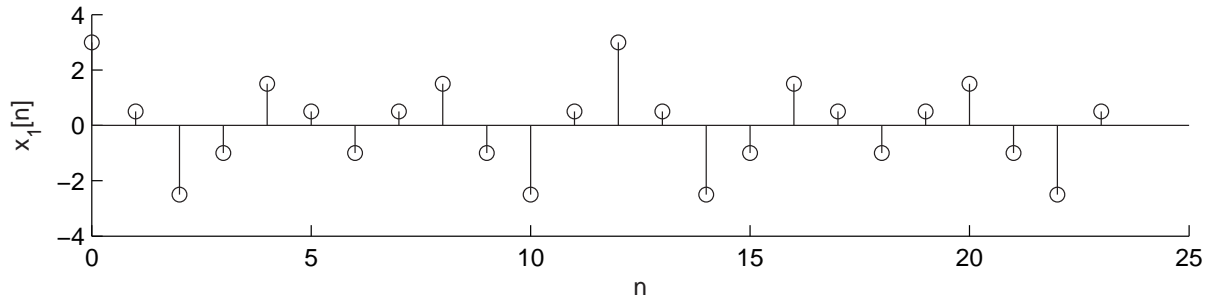
Látum  $N = 6$  fyrir hvert merki. Ákveðum hvort hvert merki sé lotubundið eða ekki. Ef merki er lotubundið, teiknum við merkið fyrir tvær lotur og byrjum í  $n = 0$ . Ef merkið er ekki lotubundið, teiknum við það fyrir  $0 \leq n \leq 4N$  og útskýrum af hverju það er ekki lotubundið.

## Lausn

Við notum formúluna sem við fundum í lið *a* til þess að finna grunnlotu hvers liðar fyrir sig. Til þess að finna sameiginlega grunnlotu þeirra leggjum við loturnar saman og finnum samnefnara. Svo finnum við tölu  $K \in \mathbb{Z}$  sem gerir brotið að heilli tölu. Sú tala er grunnlotan eins og áður. Grunnloturnar eru eftirfarandi:

Merki	Grunnlota
$x_1[n]$	12
$x_2[n]$	engin grunnlota
$x_3[n]$	24

Gröf merkjanna teiknum við svo upp með stem:



**Liður (d)****Dæmi**

Við eigum að teikna eftirfarandi merki á bilinu  $0 \leq n \leq 31$ :

$$\begin{aligned}x_1[n] &= \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right), \\x_2[n] &= \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right), \\x_3[n] &= \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{8}\right).\end{aligned}$$

Eigum svo að finna grunnlotu hvers merkis. Fyrir hvert þeirra hefði mátt finna grunnlotuna án þess að teikna merkin upp í MATLAB?

**Lausn**

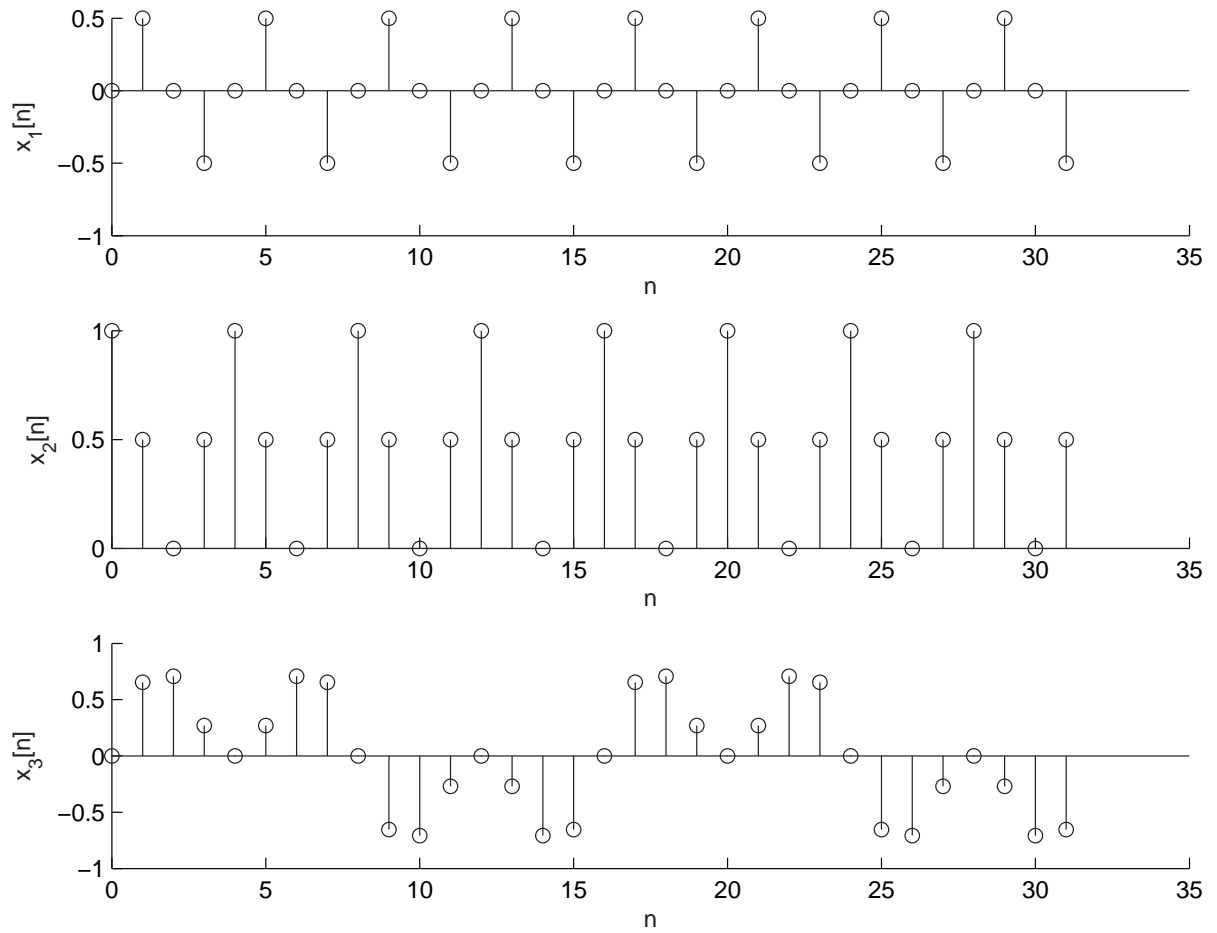
Við getum fundið grunntíðni hvers merkis fyrir sig án þess að nota MATLAB með hornafallareglum:

$$\begin{aligned}\sin x \cos x &= \sin 2x, \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y)).\end{aligned}$$

Og finnum þannig grunntíðnirnar:

Merki	Grunnlota
$x_1[n]$	12
$x_2[n]$	32
$x_3[n]$	24

Kíkjum svo á gröfin úr MATLAB:



**Liður (e)****Dæmi**

Skoðum merkin sem teiknuð voru í liðum  $c$  og  $d$ . Gefur samlagning tveggja lotubundinna merkja endilega lotubundið merki? Gefur margföldun lotubundinna merkja endilega lotubundið merki?

**Lausn**

Margföldun tveggja lotubundinna merka gefur ávallt lotubundið merki. Samlagning tveggja lotubundinna merkja gefur einnig ávallt lotubundið merki, nema í því tilviki sem annað fallið er andhverfa hins fallsins.

## Kaflí 1.3

### Liður (a)

#### Dæmi

Define a MATLAB vector  $\mathbf{nx}$  to be the time indices  $-3 \leq n \leq 7$  and the MATLAB vector  $\mathbf{x}$  to be the values of the signal  $x[n]$  at those samples, where  $x[n]$  is given by

$$x[n] = \begin{cases} 2, & n = 0 \\ 1, & n = 2 \\ -1, & n = 3 \\ 3, & n = 4 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

If you have defined these vectors correctly, you should be able to plot this discrete-time sequence by typing `stem(nx, x)`. The resulting plot should match the plot shown in Figure 1.1.

#### Lausn

Gröfin eru á næstu opnu. Fyrir nánari lausn sjá viðaukann *MATLAB kóðar*.

### Liður (b)

#### Dæmi

For this part, you will define MATLAB vectors  $\mathbf{y1}$  through  $\mathbf{y4}$  to represent the following discrete-time signals:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x[n - 2], \\ y_2[n] &= x[n + 1], \\ y_3[n] &= x[-n], \\ y_4[n] &= x[-n + 1]. \end{aligned}$$

To do this, you should define  $\mathbf{y1}$  through  $\mathbf{y4}$  to be equal to  $\mathbf{x}$ . The key is to define correctly the corresponding index vectors  $\mathbf{ny1}$  through  $\mathbf{ny4}$ . First, you should figure out how the index of a given sample of  $x[n]$  changes when transforming to  $y_i[n]$ . The index vectors need not span the same set of indices as  $\mathbf{nx}$ , but they should all be at least 11 samples long and include the indices of all nonzero samples of the associated signal.

#### Lausn

Sjá viðaukann *MATLAB kóðar*, kaflí 1.3.

## Liður (c)

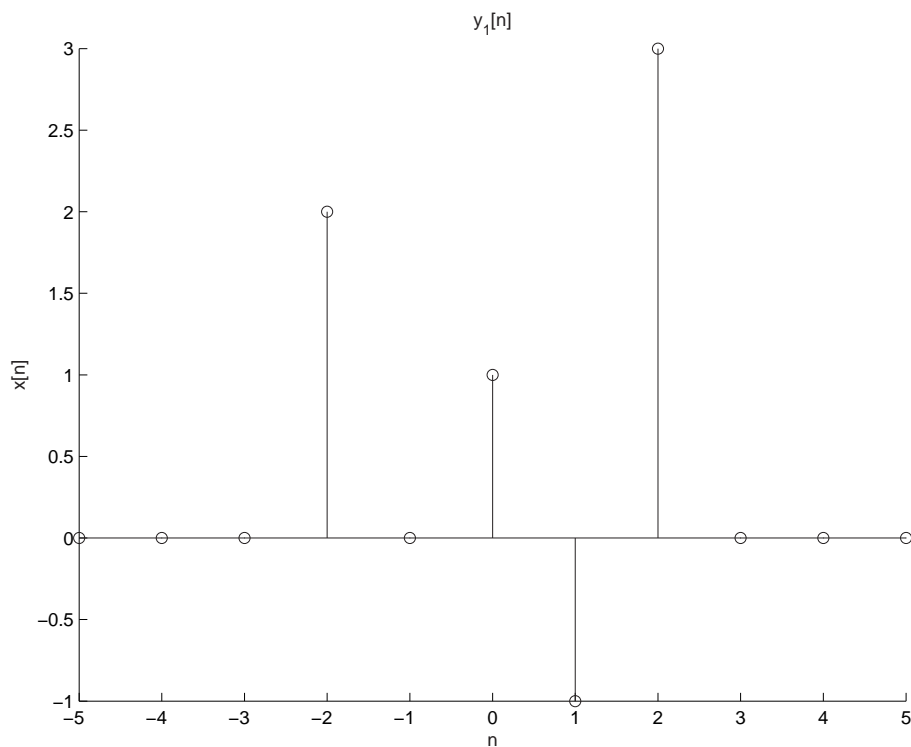
## Dæmi

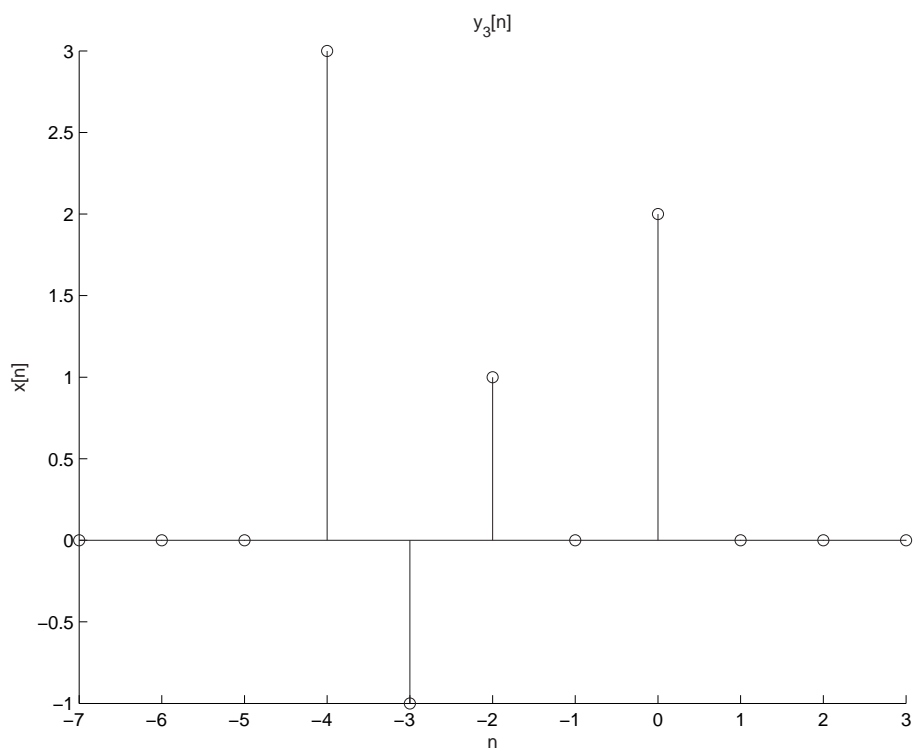
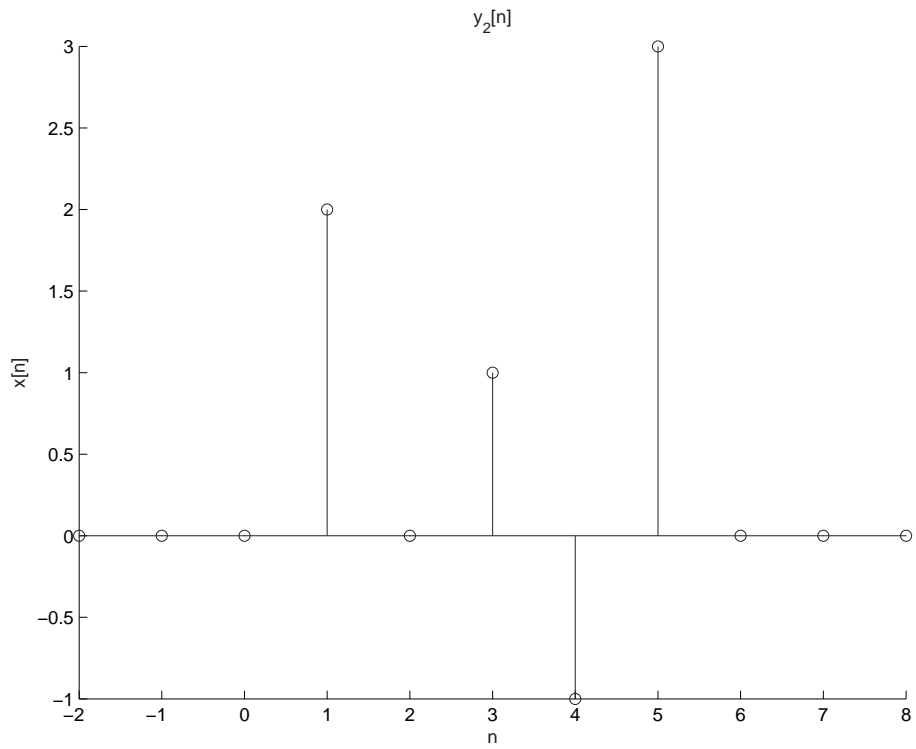
Generate the plots of  $y_1[n]$  through  $y_4[n]$  using `stem`. Based on your plots, state how each signal is related to the original  $x[n]$ , e.g., "delayed by 4", or "flipped and then advanced by 3."

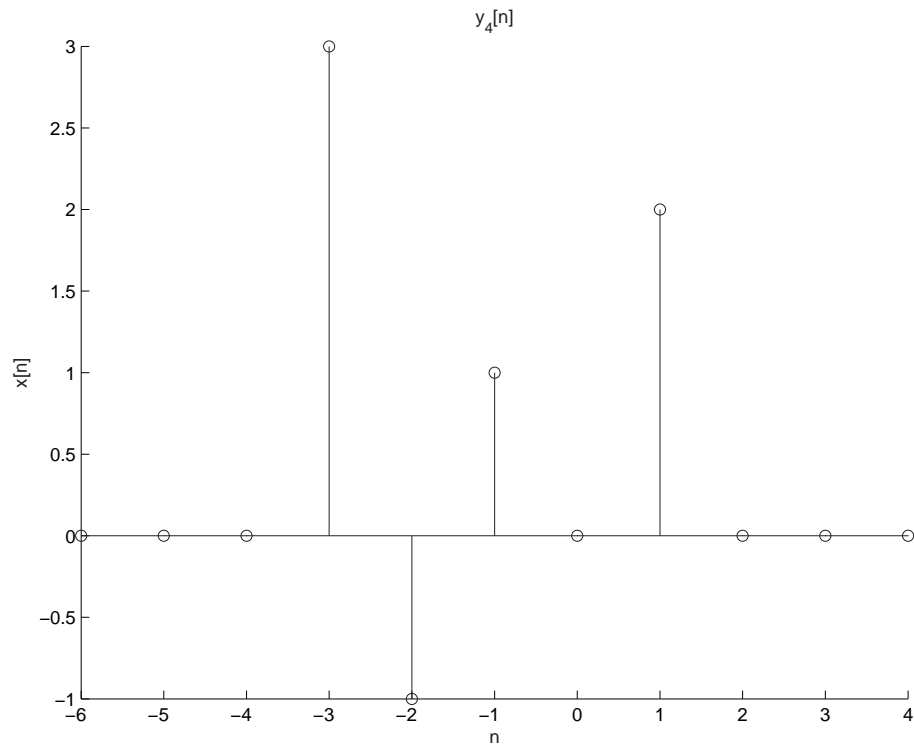
## Lausn

Merki	Breyting frá $x[n]$
$y_1[n]$	Seinkað um 2
$y_2[n]$	Flýtt um 1
$y_3[n]$	Snúið við
$y_4[n]$	Snúið við og flýtt um 1

Hér að neðan eru gröfin:







## MATLAB kóðar

### Kaffi 1.2

```
1 %MOK – Reikniverkefni I
2 %Kaffi 1.2
3 %Saevar Ofjord Magnusson
4 %Skra : kafli_1_2.m
5
6 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
7 %a lidur
8 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
9
10 % Skilgreinum breytur
11 N=12;
12 M=[4 5 7 10];
13 n=[0:(2*N-1)];
14
15 for i=1:length(M)
16     x_M=sin(2*pi*M(i).*n./N);
17     figure(1);
18     stem(n,x_M);
19     title(['M=',int2str(M(i))]);
20     xlabel('n');
21     ylabel('x_M[n]');
22     switch i
23         case 1
24             print -deps kafli_1_2_a1
25         case 2
26             print -deps kafli_1_2_a2
27         case 3
28             print -deps kafli_1_2_a3
29         case 4
30             print -deps kafli_1_2_a4
31     end
32 end
33
34
35
36 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
37 % b lidur
38 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
39
40 % Skilgreinum breytur
41 k=[1 2 4 6];
42 n=[0:9];
43 figure(1);
44 for j=1:length(k)
45     x_k=sin(2*pi*k(j).*n/5);
46     subplot(2,2,j);
```

```

47     stem(n,x_k);
48     title(['k=',int2str(k(j))]);
49     xlabel('n');
50     ylabel('x_k[n]');
51 end
52 print -deps kafli_1_2_b
53
54 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
55 % c lidur
56 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
57
58 N=6;
59
60 n1=0:2*12-1; % lota 12
61 n2=0:4*N-1; % engin lota
62 n3=0:2*24-1; % lota 24
63
64 x1=cos(2*pi.*n1/N)+2*cos(3*pi.*n1/N); % by til x vektor stakraent
65 x2=2*cos(2.*n2/N)+cos(3.*n2/N);
66 x3=cos(2*pi.*n3/N)+3*sin(5*pi.*n3/(2*N));
67
68 figure(2);
69
70 subplot(3,1,1);
71 stem(n1,x1);
72 xlabel('n');
73 ylabel('x_1[n]');
74
75 subplot(3,1,2);
76 stem(n2,x2);
77 xlabel('n');
78 ylabel('x_2[n]');
79
80 subplot(3,1,3);
81 stem(n3,x3);
82 xlabel('n');
83 ylabel('x_3[n]');
84 print -deps kafli_1_2_c
85
86 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
87 % d lidur
88 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
89
90 % index vektor
91 n=0:31;
92 x1=sin(pi.*n/4).*cos(pi.*n/4);
93 x2=cos(pi.*n/4).^2;
94 x3=sin(pi.*n/4).*cos(pi.*n/8);
95
96 figure(3);

```

```

97
98 subplot(3,1,1);
99 stem(n,x1);
100 xlabel('n');
101 ylabel('x_1[n]');
102
103 subplot(3,1,2);
104 stem(n,x2);
105 xlabel('n');
106 ylabel('x_2[n]');
107
108 subplot(3,1,3);
109 stem(n,x3);
110 xlabel('n');
111 ylabel('x_3[n]');
112
113 print -deps kafli_1_2_d
114
115 disp('finito!')

```

### Kafli 1.3

```

1 %MOK – Reikniverkefni I
2 %Kafli 1.3
3 %Saevar Ofjord Magnusson
4 %Skra: kafli_1_3.m
5
6 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
7 % a lidur
8 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
9
10 % gerum index vektorinn
11 nx = -3:7;
12 % fyllum x af nullum
13 x=zeros(1,11);
14 % endurskilgreinum svoá ðkvena punktaí x vektornum
15 % s.s n=0 er 4. stak i vektornum
16 x(4)=2; % n=0
17 x(6)=1; % n=2
18 x(7)=-1; % n=3
19 x(8)=3; % n=4
20
21 % gerum grafid
22 figure(1);
23 stem(nx,x);
24 xlabel('n');
25 ylabel('x[n]');
26 print -deps kafli_1_3_a
27
28 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```
29 % b lidur
30 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
31
32 % skilgreinum merkin
33 y1 = x;
34 y2 = x;
35 y3 = x;
36 y4 = x;
37
38 % og index vektorana
39 ny1 = (nx-2); % hlidrad um -2
40 ny2 = (nx+1); % hlidrad um +1
41 ny3 = (-1*nx); % merki snuid vid , engin hlidrun
42 ny4 = ((-1*nx)+1); % merki snuid vid , hlidrad um +1
43
44 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
45 % c lidur
46 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
47
48 % buum til grofin
49 figure(1);
50 stem(ny1,y1);
51 ylabel('x[n]');
52 xlabel('n');
53 title('y_1[n]');
54 print -deps kafli_1_3_b1
55
56 stem(ny2,y2);
57 ylabel('x[n]');
58 xlabel('n');
59 title('y_2[n]');
60 print -deps kafli_1_3_b2
61
62 stem(ny3,y3);
63 ylabel('x[n]');
64 xlabel('n');
65 title('y_3[n]');
66 print -deps kafli_1_3_b3
67
68 stem(ny4,y4);
69 ylabel('x[n]');
70 xlabel('n');
71 title('y_4[n]');
72 print -deps kafli_1_3_b4
73
74 disp('finito!')
```