



# HÁSKÓLI ÍSLANDS

## Reikniverkefni II

Lágmarks-, hámarksfasi, línulegur fasi  
og uppbygging kerfa

24. október 2006

Sævar Öfjörð Magnússon



# 1 Lágmarksfasakerfi og önnur kerfi

## 1.1 Verkefnislýsing

Yfirfærslufall kerfis er að hluta til gefið með pólunum

$$p_1 = 0.9e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad p_2 = 0.8$$

og núllunum

$$z_1 = 1.5e^{j\frac{\pi}{8}}, \quad z_2 = 0.5$$

**1.**

Við eigum að finna póla og núll ásamt margföldunarstuðli sem gerir yfirfærslufallið  $H_1(z)$  að raungildu, stöðugu kerfi af 3. gráðu með  $H_1(1) = 1$ . Er kerfið með lágmarksfasa?

**2.**

Breytum nú viðeigandi stikum kerfisins sem  $H_1(z)$  lýsir þannig að yfirfærsluföllin  $H_\lambda(z)$  af þriðju gráðu hafi eiginleikann  $|H_\lambda(e^{j\omega})| = |H_1(e^{j\omega})|$ . Finnum öll föll  $H_\lambda(z)$ ,  $\lambda = 2, \dots$  af stöðugum kerfum með þennan eiginleika. Til þess að prófa niðurstöðurnar eigum við að búa til graf af  $|H_\lambda(e^{j\omega})|$  fyrir öll kerfin. Hver þeirra eru lágmarksfasa, og hver hámarksfasa?

**3.**

Nú reiknum við fyrir yfirfærsluföllin í lið 2 fasann  $\phi_\lambda(\omega)$ , grúpuseinkunina  $\tau_{g\lambda}(\omega)$ , impúlssvörun  $h_\lambda[n]$ , og orkuna í impúlssvöruninni  $w_{h\lambda}[m] = \sum_{n=0}^m h_\lambda^2[n]$ . Veljum  $0 \leq n \leq 50$ . Teiknum svo föllin í eina mynd til samanburðar. Fullvissum okkur líka um að lágmarksfasa-kerfið hafi minnsta fasa sem búið er að vinda ofan af á bilinu  $[0, \pi]$ .

**4.**

Næst eigum við að sannreyna eftirfarandi fullyrðingu: Látum  $\tau_{gM}(\omega)$  vera grúpuseinkun lágmarksfasa-kerfisins og  $\tau_{g\lambda}(\omega)$  er grúpuseinkun hinna kerfanna (með sama  $|H(e^{j\omega})|$ ). Þá gildir:

$$\tau_{gM}(\omega) < \tau_{g\lambda}(\omega), \quad \forall \omega, \lambda \quad (1)$$

**5.**

Reiknum svo  $\int_0^\pi \tau_{g\lambda}(\omega) d\omega$  tölulega fyrir öll tilfelli. Sannreynum að gildin séu  $\frac{l\pi}{2}$ , þar sem  $l$  er háð fjölda núlla utan einingahringsins.

**6.**

Nú örvum við lágmarksfasakerfið ásamt einu hinna kerfanna með innmerkinu  $\mathbf{v} = \mathbf{rand}(1, 100)$ . Reiknum hlaupandi orkuna  $w_y[n]$  og  $w_{yM}[n]$  í samsvarandi útmerkjum  $y[n]$  og  $y_m[n]$  og sannreynum venslin

$$w_{yM}[m] \geq w_y[m], \quad \forall m. \quad (2)$$

**7.**

Látum  $H_M(z)$  vera yfirfærslufall lágmarksfasakerfisins sem við fundum í lið 2. Finnum andhverfu þess kerfis  $H_{Mi}(z) = \frac{1}{H_M(z)}$ . Reiknum grúpuseinkunina  $\tau_{gMi}(\omega)$  og berum hana saman við  $\tau_{gM}(\omega)$ .

## 1.2 Lausn

### 1.

Við vitum að til þess að kerfið verði raungilt verður þriðja núllið að vera  $z_3 = z_1^* = 1.5e^{-j\frac{\pi}{8}}$ . Til þess að kerfið verði stöðugt þarf þriðji póllinn að vera inni í einingahringnum og svo kerfið verði raungilt og stöðugt þarft þriðji póllinn jafnframt að vera  $p_3 = p_1^* = 0.9e^{-j\frac{\pi}{4}}$ . Yfirfærslufallið verður því:

$$H_1(z) = \frac{1 - 3.2716z^{-1} + 3.6358z^{-2} - 1.1250z^{-3}}{1 - 2.0728z^{-1} + 1.8282z^{-2} - 0.6480z^{-3}}$$

Við sjáum strax að kerfið getur ekki verið lágmarksfasa því tvö núll eru utan einingahringins  $|z| = 1$ . Við sjáum líka að  $H_1(1) = 2.2261$  svo við þurfum að margfalda  $H_1(z)$  með  $1/2.2261 = 0.4492$  sem þýðir að yfirfærslufallið verður

$$H_1(z) = \frac{0.4492 - 1.4696z^{-1} + 1.6332z^{-2} - 0.5054z^{-3}}{1 - 2.0728z^{-1} + 1.8282z^{-2} - 0.6480z^{-3}}$$

### 2.

Látum  $\zeta_k$  vera núll fyrir  $H_1(z)$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Þá getum við fundið þrjá alhleypliði

$$A_k = \frac{-\zeta_k^* + z^{-1}}{1 - \zeta_k^* z^{-1}}$$

sem hafa  $|A_k| = 1$ . Þá getum við margfaldað  $A_k$  við  $H_1(z)$  til þess að búa til nýtt yfirfærslufall,  $H_\lambda(z)$ ,  $\lambda = 1, \dots$ , þar sem búið er færa núll, og er það alltaf fært yfir einingahringinn. Til þess að þessi nýju yfirfærsluföll verði raungild, þurfa þvergild núll alltaf að vera færð saman. Við höfum því eingöngu þrjú tilfelli (gerum ráð fyrir að  $\zeta_1 = \zeta_3^*$ ):

(a) Færum  $\zeta_2$ .

(b) Færum  $\zeta_1$  og  $\zeta_3$ .

(c) Færum  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  og  $\zeta_3$ .

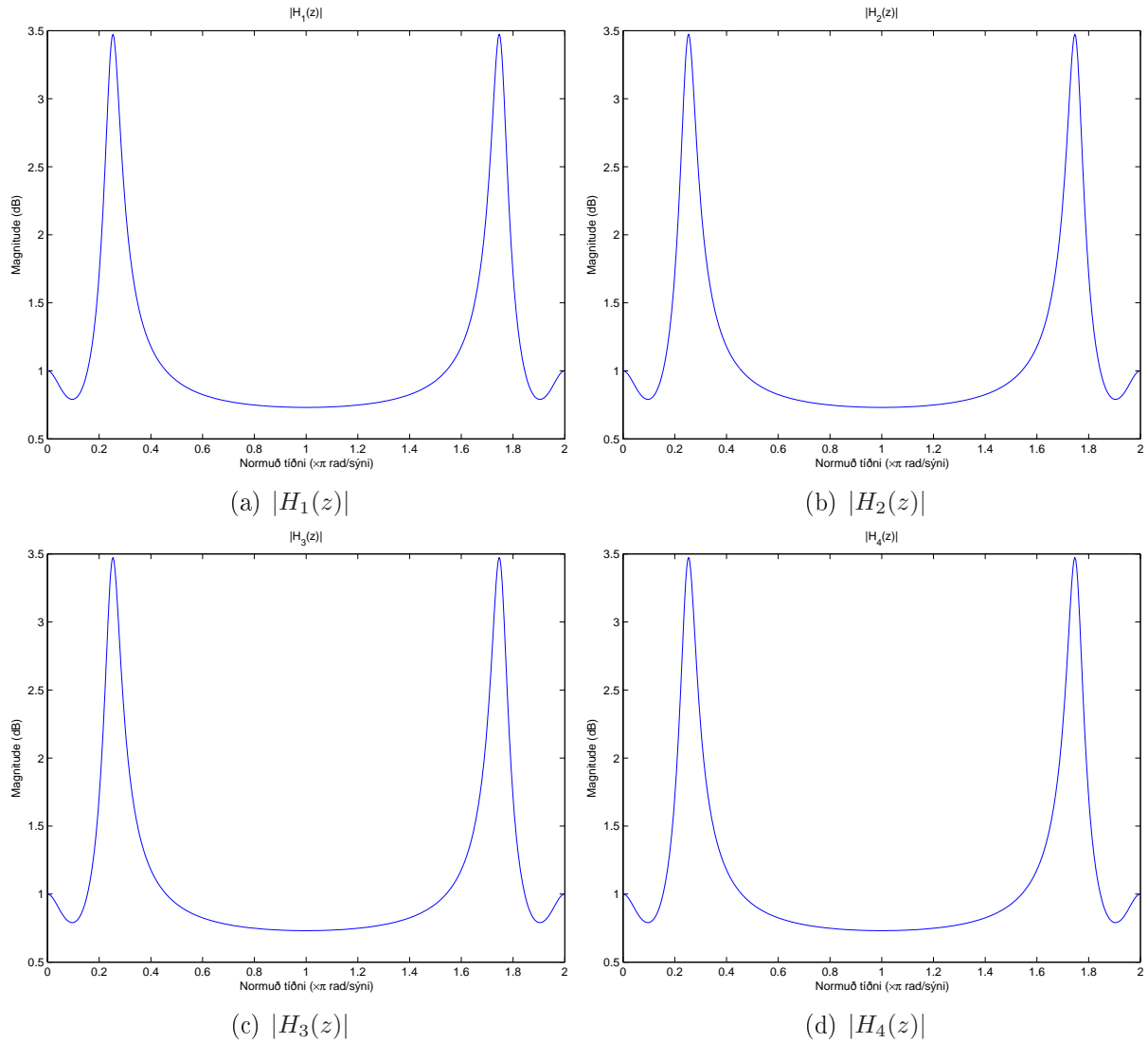
Nýju yfirfærsluföllin verða því:

$$H_2(z) = H_1(z) \cdot A_2(z) = \frac{-0.2246 + 1.0717z^{-1} - 1.7504z^{-2} + 1.0107z^{-3}}{1 - 2.0728z^{-1} + 1.8282z^{-2} - 0.6480z^{-3}}$$

$$H_3(z) = H_1(z) \cdot A_1(z) \cdot A_3(z) = \frac{1.0107 - 1.7504z^{-1} + 1.0717z^{-2} - 0.2246z^{-3}}{1 - 2.0728z^{-1} + 1.8282z^{-2} - 0.6480z^{-3}}$$

$$H_4(z) = H_1(z) \cdot A_1(z) \cdot A_2(z) \cdot A_3(z) = \frac{-0.5054 + 1.6332z^{-1} - 1.4696z^{-2} + 0.4492z^{-3}}{1 - 2.0728z^{-1} + 1.8282z^{-2} - 0.6480z^{-3}}$$

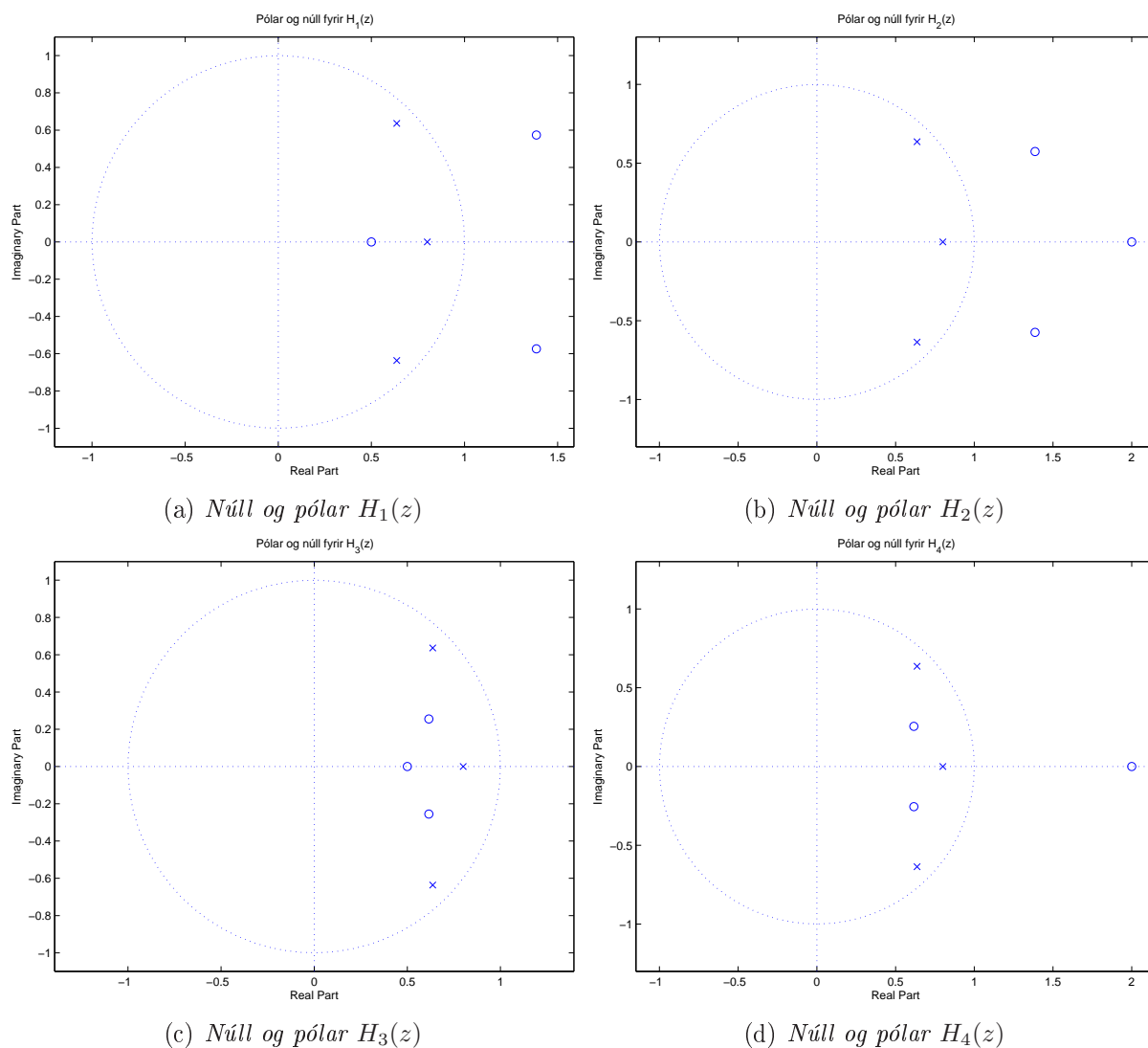
Teiknum nú upp á mynd 1 stærð  $H_\lambda(z)$ ,  $\lambda = 1, 2, 3, 4$  og fullvissum okkur um að hún sé sú sama fyrir öll föllin:



Mynd 1: Stærðir tíðnisvarana fyrir yfirfærsluföllin  $H_\lambda(z)$

Sjáum strax á þessari mynd að  $H_\lambda(1) = H_\lambda(e^{j2\pi}) = 1$ . Sjáum líka að stærðin er sú sama, enda er það niðurstaðan sem við þjuggumst við. Alhleypliðirnir hafa allir stærðina 1 svo það á ekki að breyta neinu um heildarstærð fallanna að margfalda þá við.

Teiknum svo á mynd 2 núllpólarit fyrir föllin.

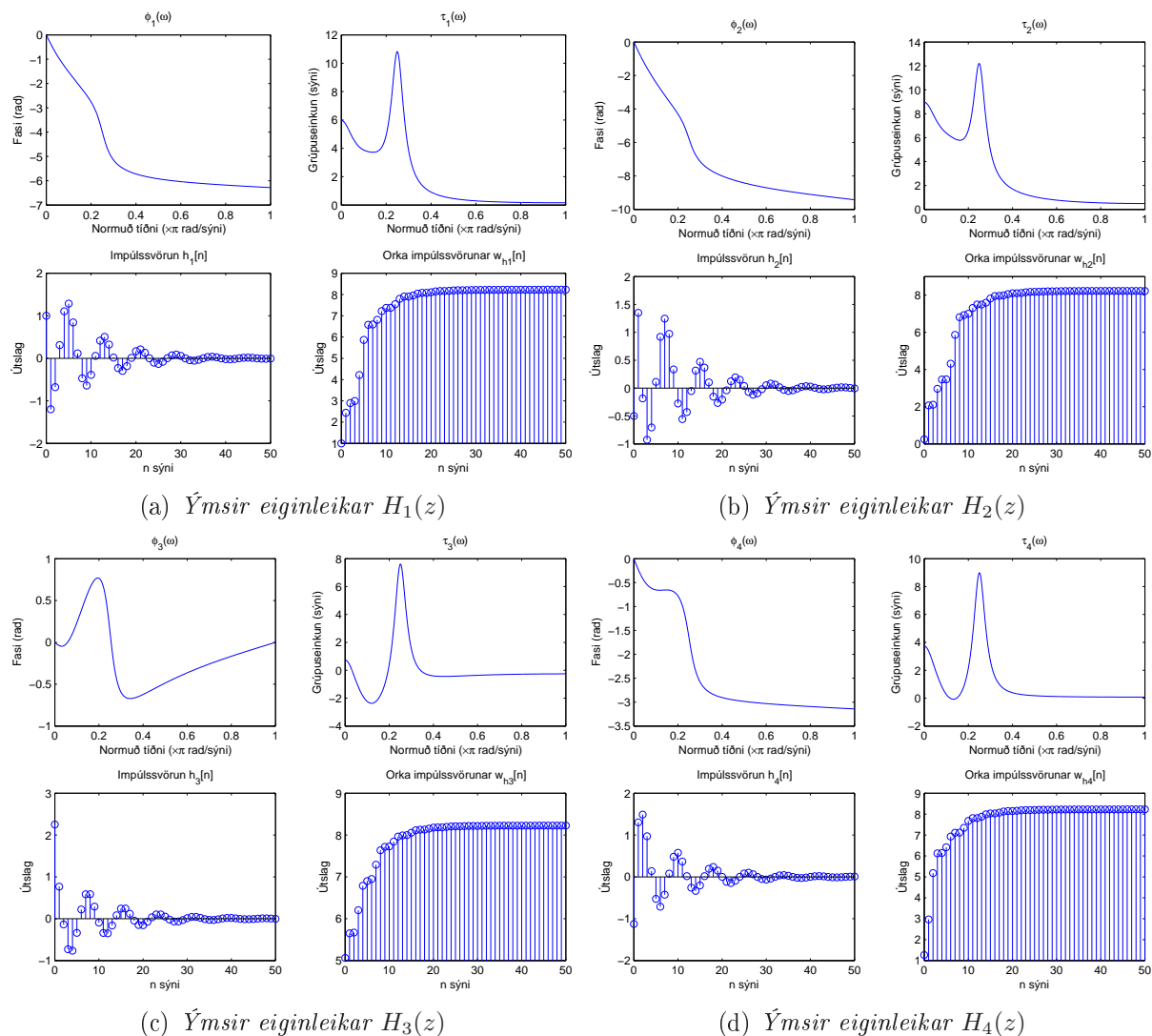


Mynd 2: Núllpólarit fyrir yfirfærsluföllin  $H_\lambda(z)$

Sjáum að  $H_3(z)$  á mynd 2(c) er lágmarksfasa og  $H_2(z)$  á mynd 2(b) er hámarksfasa. Þetta passar líka við þau tilfelli sem sett voru fram fyrr í textanum, fyrst skiptum við út  $z_2$  og fáum  $H_2(z)$ , svo skiptum við út bæði  $z_1$  og  $z_3$  og fáum  $H_3(z)$ , og að lokum skiptum við út öllum núllum og fáum  $H_4(z)$ .

### 3.

Við teiknum föllin upp á mynd 3. Föllin `grpdelay`, `impz`, `freqz` og `unwrap` voru notuð, í viðaukanum *Matlab kóðar* má sjá frekari útlístan á því hvernig þessar myndir eru fengnar.



Mynd 3: Ýmsir eiginleikar fyrir yfirfærsluföllin  $H_\lambda(z)$

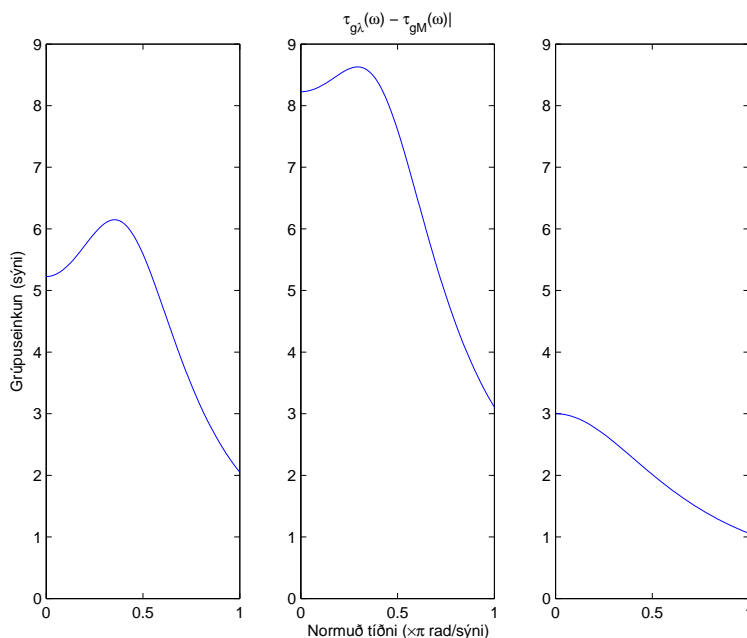
Sjáum á mynd 3(c) að  $H_3(z)$  hefur í raun minnsta fasann (ath. það er búið að vinda ofan af fasanum á öllum myndunum) á bilinu  $[0, \pi]$ , enda höfðum við áður getið okkur til um það út frá staðsetningu núllanna.

#### 4.

Það sem notað var hér var að prófa fyrir grúpuseinkun allra fallana, hvort eftirfarandi gilti:

$$\tau_{g\lambda} - \tau_{gM} > 0$$

Niðurstöður má sjá á mynd 1.2. Eins og sést á þeirri mynd fáum við samfelld föll sem eru hvergi minni en núll. Það þýðir að fullyrðingin sem sett var fram í jöfnu 1 stenst.



Mynd 4: Mismunur grúpuseinkana  $\tau_{g\lambda}$  og grúpuseinkunar lágmarksfasafallsins,  $\tau_{gM}$ .

#### 5.

Sú leið sem farin var hér var að nota beint úttakið úr fallinu `grpdelay` í Matlab. Það fall tekur við yfirfærslufalli og punktafjölda  $N$  og reiknar grúpuseinkun í  $N$  punktum sem eru jafndreifðir yfir einingahringinn í efra hálfplani. Það eina sem þá á eftir að gera er að margfalda hvern punkt í niðurstöðunni með  $\frac{\pi}{512}$  og leggja síðan allar þær margfaldanir saman. Niðurstöðuna má sjá í töflu 1.

Tafla 1: Útreikningur á fasabreytingu yfir bilið  $[0, \pi]$ .

Grúpuseinkun	$\int_0^\pi \tau_{g\lambda}(\omega) d\omega$	$l = (2/\pi) \cdot \int_0^\pi \tau_{g\lambda}(\omega) d\omega$
$\tau_{g1}(\omega)$	6.3010	4.0113
$\tau_{g2}(\omega)$	9.4508	6.0166
$\tau_{g3}(\omega)$	0.0031	0.0019
$\tau_{g4}(\omega)$	3.1528	2.0072

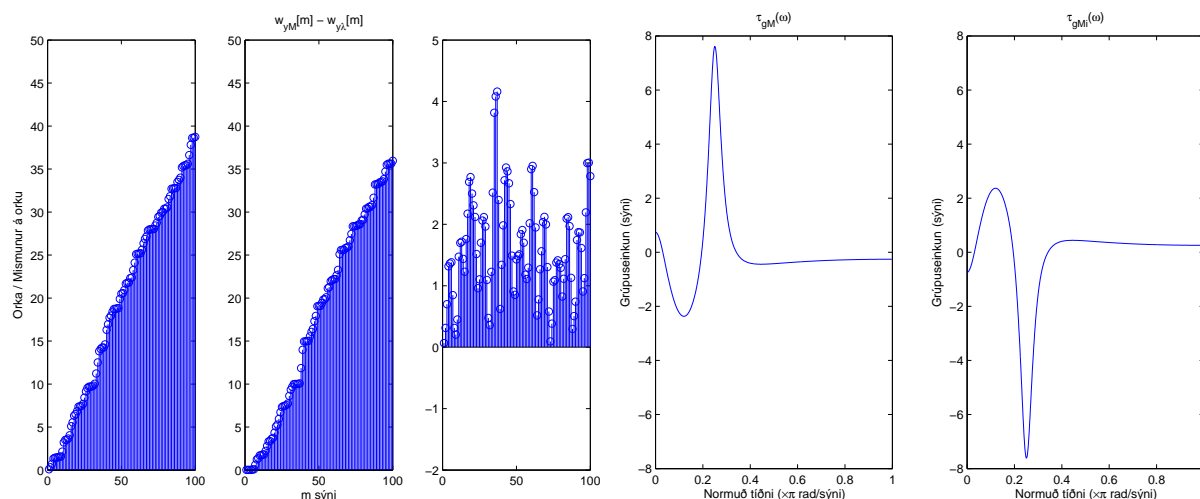
Við sjáum beint úr töflunni að  $l$  er háð fjölda núlla utan einingahringsins, það er  $l$  er tvöfaldur fjöldi núlla utan einingahringsins.

## 6.

Nú var slembimerkinu rennt í gegnum lágmarksfasafallið  $H_3(z)$  svo og  $H_1(z)$  með **filter** fallinu í Matlab. Hlaupandi orka útmerkjanna var reiknuð og athugað hvort eftirfarandi gilti:

$$w_{yM}[m] - w_y[m] \geq 0, \quad \forall m.$$

Þessi mismunur ásamt orkurunum útmerkjanna var teiknaður á mynd 5(a):



(a) Mismunur orku útmerkis  $y_M[n]$  og útmerkis  $y[n]$  (b) Samanburður á grúpuseinkunum  $H_M(z)$  og  $H_{M_i}(z)$ .

Mynd 5: Myndir fyrir liði 6 og 7.

Eins og sést á myndinni hlýtur jafna 2 að gilda, þar eð mismunurinn er alltaf stærri en núll.

## 7.

Að lokum reiknum við grúpuseinkun fyrir andhverfa kerfi lágmarksfasakerfisins. Nóg er að víxla á teljara og nefnara í fallinu `grpdelay` til þess að ná þessu fram. Samanburður á grúpuseinkunum þessara tveggja kerfa er sýndur á mynd 5(b). Við sjáum að andhverfa kerfið hefur einmitt andhverfa grúpuseinkun.

## 2 Kerfi með línulegan fasa

### 2.1 Verkefnislýsing

Okkur eru gefin tvö núlla FIR kerfis

$$z_1 = 0.9e^{j\frac{\pi}{5}} \quad z_2 = e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (3)$$

#### 1.

Við eigum í fyrsta lagi að finna önnur núll þannig að við getum myndað yfirfærslufall sem lýsir kerfi með eftirfarandi tíðnisvörðun:

(a)  $H_a(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\tau_a} H_{0a}(e^{j\omega})$ , þar sem  $\tau_a$  er fasti og  $H_{0a}(e^{j\omega})$  er raungilt.

(b)  $H_b(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\tau_b} H_{0b}(e^{j\omega})$ , þar sem  $\tau_b$  er fasti og  $H_{0b}(e^{j\omega})$  er þvergilt.

#### 2.

Í öðru lagi þurfum við að ákvarða  $\tau_a$  og  $\tau_b$ . Einnig eigum við að reikna og teikna á graf samsvarandi föll  $H_{0a}(e^{j\omega})$  og  $H_{0b}(e^{j\omega})$  sem útslags- og fasaróf.

### 2.2 Lausn

#### 1.

Við vitum að þar sem þessi yfirfærsluföll eiga að vera með línulegan fasa þá getum við fundið með vissu fjögur önnur núll:

$$z_3 = z_1^*, \quad z_4 = \frac{1}{z_1}, \quad z_5 = \frac{1}{z_1^*}, \quad z_6 = z_2^*$$

(a) Fyrra yfirfærslufallið er:

$$H_a(z) = 1 - 3.2540z^{-1} + 5.6626z^{-2} - 6.5081z^{-3} + 5.6626z^{-4} - 3.2540z^{-5} + z^{-6}$$

Við sjáum að þetta er tegund I af FIR síu með línulegan fasa þar eð við höfum samhverfu í impúlssvörðun og staðsetning núlla myndar samhverfu um einingahringinn (en við höfum valið þau þannig). Samkvæmt skilgreiningu og jöfnu 7.39 í Mitra uppfyllir  $H_a(z)$  að  $H_{0a}(e^{j\omega})$  sé raungilt og að  $\tau_a$  sé fasti.

(b) Til þess að finna hitt yfirfærslufallið þurfum við að gera okkur grein fyrir hvers konar tegund FIR síu við erum að leita að. Í þeim tilfellum sem útslagssvörðunin er oddstæð, verður hún þvergild. Það á við um gerðir III og IV af FIR síum með línulegan fasa. Ef við bætum við einu núlli í  $z = 1$  fáum við gerð IV. Yfirfærslufallið verður því:

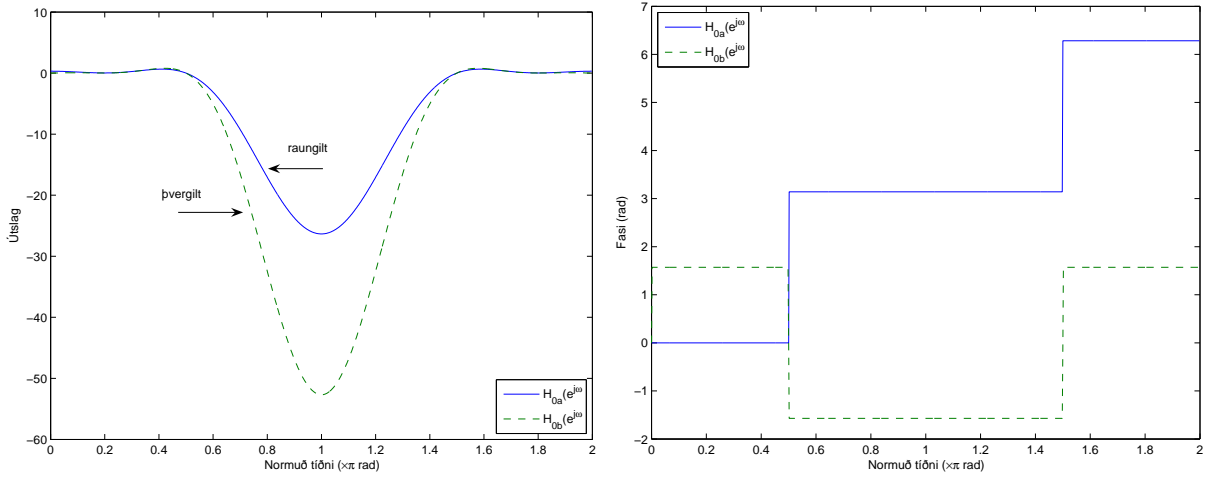
$$H_b(z) = 1 - 4.2540z^{-1} + 8.9166z^{-2} - 12.1707z^{-3} + 12.1707z^{-4} - 8.9166z^{-5} + 4.2540z^{-6} - z^{-7}$$

2.

Við vitum að  $\tau_a$  og  $\tau_b$  eru bara hallatölur fasans og gefur jafna 7.58 í Mitra okkur að hallinn sé ávallt  $\frac{N}{2}$ . Við vitum þá að

$$\tau_a = 3, \quad \tau_b = 3.5$$

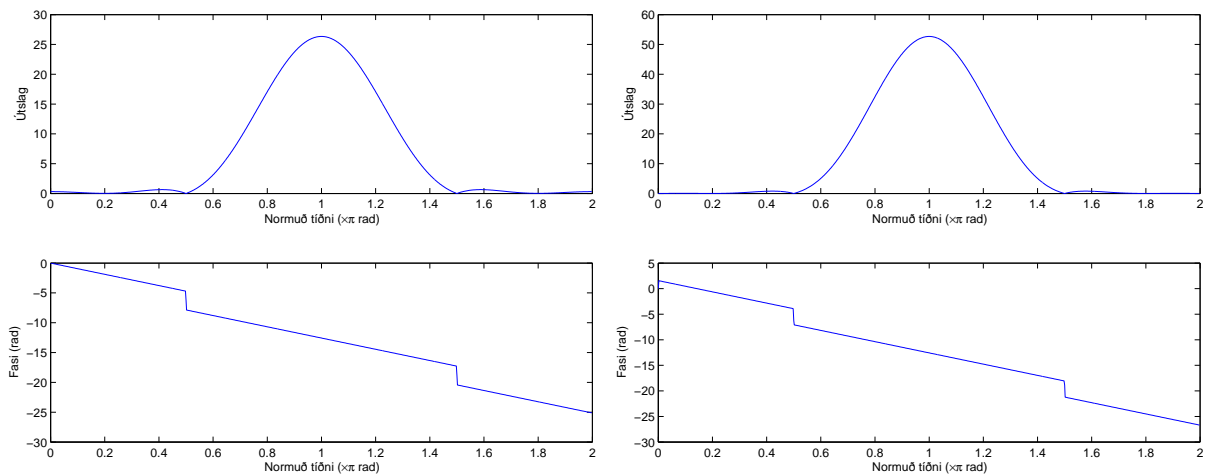
Þá er orðið einfalt að teikna upp  $H_{0a}(e^{j\omega})$  og  $H_{0b}(e^{j\omega})$ . Við einfaldlega margföldum í gegnum yfirfærsluföllin með  $e^{j\omega\tau_a}$  og  $e^{j\omega\tau_b}$  til þess að finna þau. Útslags- og fasaróf má sjá á mynd 6. Við sjáum hér að útslagið er svipað að lögun í báðum föllunum en annað



(a) Útslag. Græna brotna línan er  $H_{0b}$  sem er (b) Fasi. Græna brotna línan er  $H_{0b}$  og bláa heila þvergil og bláa heila línan er  $H_{0a}$  sem er eingöngu línan er  $H_{0a}$  raungilt.

Mynd 6: Útslags- og fasaróf fyrir  $H_{0a}$  og  $H_{0b}$ .

þeirra er eingöngu raungilt, en hitt eingöngu þvergil, sem passar við skilyrðin sem sett voru. Undið var ofan af fasanum og lítur hann frekar illa út. Til samanburðar eru útslags- og fasaróf fyrir yfirfærsluföllin  $H_a(z)$  og  $H_b(z)$  á mynd 7.



(a) Útslag og fasi  $H_a(z)$ .

(b) Útslag og fasi  $H_b(z)$ .

Mynd 7: Útslags- og fasaróf fyrir  $H_a$  og  $H_b$ .

## 3 Bygging FIR yfirfærslufalla

### 3.1 Verkefnislýsing

Orsakatengt FIR yfirfærslufall af gráðu  $M - 1$  á margliðuformi er gefið með

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]z^{-k}. \quad (4)$$

Þáttað form yfirfærslufallsins sem gefið er með

$$H(z) = h[0] \prod_k (1 + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2}) \quad (5)$$

má svo ákvarða út frá margliðuforminu og síðan nota til þess að byggja  $H(z)$  í kaskóðutengingu (e. *cascade*). Skrifum m-skrá sem framkvæmir þessa aðgerð og staðfestum með því að svara eftirfarandi spurningum:

- (a) Með því að nota forritið sem við bjuggum til eigum við að búa til kaskóðubyggingu fyrir FIR yfirfærslufallið

$$H_1(z) = 2 + 10z^{-1} + 23z^{-2} + 34z^{-3} + 31z^{-4} + 16z^{-5} + 4z^{-6}.$$

Skissum jafnframt kassarit fyrir bygginguna og svörum því hvort  $H_1(z)$  sé með línulegan fasa.

- (b) Búum einnig til kaskóðubyggingu fyrir FIR yfirfærslufallið

$$H_2(z) = 6 + 31z^{-1} + 74z^{-2} + 102z^{-3} + 74z^{-4} + 31z^{-5} + 6z^{-6}.$$

Skissum jafnframt kassarit fyrir bygginguna og svörum því hvort  $H_2(z)$  sé með línulegan fasa. Finnum einnig kaskóðutengingu fyrir  $H_2(z)$  með eingöngu 4 margföldurum og skissum kassarit fyrir nýju kaskóðutenginguna.

### 3.2 Lausn

Ég skrifaði fallið `poly2casc` til þess að leysa þetta verkefni:

```
1 function [h0, beta] = poly2casc(H)
2
3 % viljum línuvigur
4 s = size(H);
5 if s(1) > 1
6     H = H';
7 end
8 N = length(H);
9 % finnum gainið
10 [z, p, h0] = zpndata(tf(H, 1));
11 clear z p
12 % finnum núllin
13 zeros = sort(roots(H));
14
15 zi = []; zr = [];
16 i = 1; r = 1;
17 % skoðum öll núllin sem við höfum
18 for k = 1:length(zeros)
19     % tókum fyrst þau þvergildu
```

```

20     if any(imag(zeros(k)))
21         % Tökum bara núll í efra hálfplani
22         if imag(zeros(k)) > 0
23             zi(i)=zeros(k);
24             i=i+1;
25         end
26     else
27         zr(r) = zeros(k);
28         r=r+1;
29     end
30 end
31 clear i r;
32
33 % byrjum á að para saman núllin
34 m=1;
35 if any(zi)
36     for n = 1:length(zi)
37         tmp = conv([1 -zi(n)], [1 -conj(zi(n))]);
38         beta(m,:) = tmp(2:length(tmp));
39         m=m+1;
40     end
41 end
42 % tökum svo rauntölurnar
43 if any(zr)
44     for n = 1:2:length(zr)
45         % passa upp á oddatölufjölda
46         if n~=length(zr)
47             tmp = conv([1 -zr(n)], [1 -zr(n+1)]);
48             if length(tmp)<3
49                 beta(m,1) = tmp(2);
50             else
51                 beta(m,:) = tmp(2:length(tmp));
52             end
53             m=m+1;
54         else
55             beta(m,1) = -zr(n);
56         end
57     end
58 end

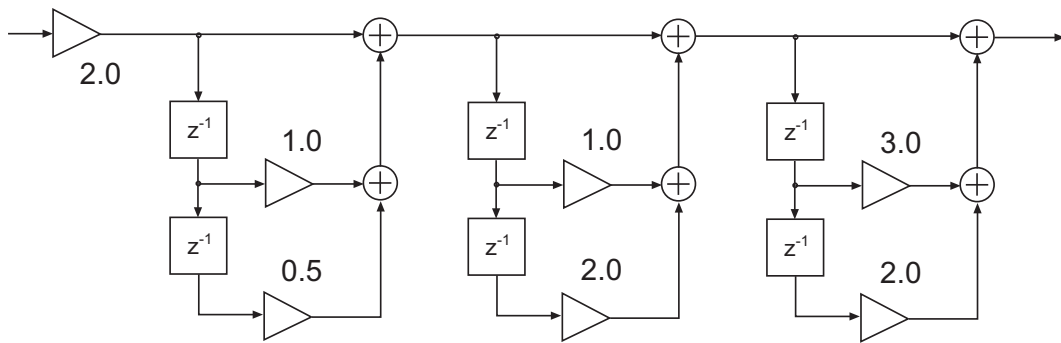
```

Við sjáum strax að  $H_1(z)$  hefur hvorki samhverfu né andsamhverfu í margliðustuðlum svo það hefur ekki línulegan fasa.  $H_2(z)$  hefur hins vegar samhverfu í stuðlunum svo það hefur línulegan fasa. Yfirfærsluföllun  $H_1(z)$  og  $H_2(z)$  var rennt í gegnum `poly2cas` og má sjá  $\beta$  stuðlana (og mögnunina  $h[0]$ ) sem fengust í töflu 2:

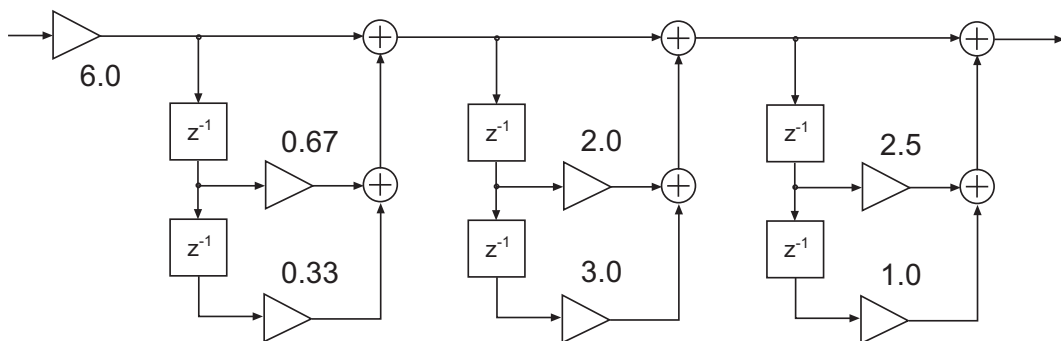
Tafla 2:

$k$	$H_1(z)$			$H_2(z)$		
	$h_1[0]$	$\beta_{1k_{H1}}$	$\beta_{2k_{H1}}$	$h_2[0]$	$\beta_{1k_{H2}}$	$\beta_{2k_{H2}}$
$k = 1$	2	1.0	0.5	6	0.67	0.33
$k = 2$	-	1.0	2.0	-	2.0	3.0
$k = 3$	-	3.0	2.0	-	2.5	1.0

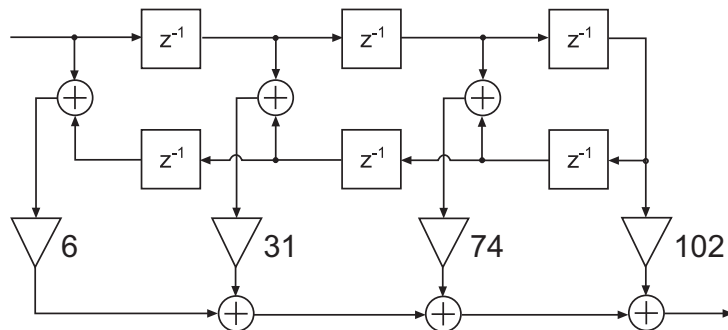
Að lokum voru þessar tengingar skissaðar sem kassarit á mynd 8. Tengingu með einungis fjórum margföldurum fyrir  $H_2(z)$  má sjá á mynd 8(c), en það er einmitt mögulegt vegna samhverfu í impúlsvörum.



(a)  $H_1(z)$



(b)  $H_2(z)$



(c)  $H_2(z)$

Mynd 8: Kaskóðutengingar fyrir  $H_1(z)$  og  $H_2(z)$ , auk tengingar með aðeins 4 margföldurum fyrir  $H_2(z)$ .

## 4 Samhliða alhleyphi-bygging IIR yfirfærslufalls

### 4.1 Verkefnislýsing

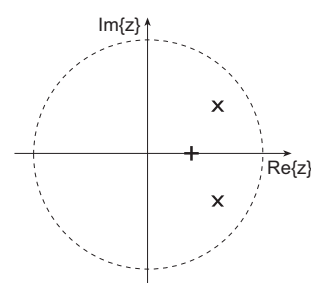
Finnum summu alhleypliða þáttun 3. gráðu orsakatengds, *bounded-real* Chebyshev yfirfærslufalls fyrir lághleypisú sem gefið er með

$$G(z) = \frac{0.0736 + 0.2208z^{-1} + 0.2208z^{-2} + 0.0736z^{-3}}{1 - 0.9761z^{-1} + 0.8568z^{-2} - 0.2919z^{-3}}.$$

Finnum einnig *power-complementary* yfirfærslufall  $G(z)$ , og köllum það  $H(z)$ . Hver er gráða alhleypliðanna? Finnur samhliða alhleyphi-byggingu  $G(z)$  og  $H(z)$  með 3 margfaldara að hámarki með því að byggja alhleypliðina sem kaskóðutengingu fyrstu og/eða annarrar gráðu eininga.

### 4.2 Lausn

Það að yfirfærslufallið sé BR (bounded-real) þarf það að uppfylla  $|H(e^{j\omega})| < 1$  fyrir öll  $\omega$ . Skoðum það aðeins seinna. Til þess að finna alhleypliðina þarf fyrst að finna póla  $G(z)$ . Á mynd 9 má sjá póla sem svipar til póla  $G(z)$ . Við byrjum á pólnum með mesta neikvæða hornið og köllum hann  $\xi_0$ . Næsti póll heitir þá  $\xi_1$  og sá síðasti  $\xi_2$  (ath.  $\xi_2 = \xi_0^*$ ). Póla með slétttölu á skör notum við til þess að byggja  $A_0(z)$  og póla með oddatölu á skör notum við í  $A_1(z)$ .  $A_0$  og  $A_1$  eru á forminu



$$A_0(z) = \frac{(z^{-1} - \xi_0)(z^{-1} - \xi_2)}{(1 - \xi_0 z^{-1})(1 - \xi_2 z^{-1})}, \quad A_1(z) = \frac{(z^{-1} - \xi_1)}{(1 - \xi_1 z^{-1})}.$$

Mynd 9: Pólar hópaðir saman til þess að búa til alhleypiföllin  $A_1(z)$  og  $A_0(z)$ .

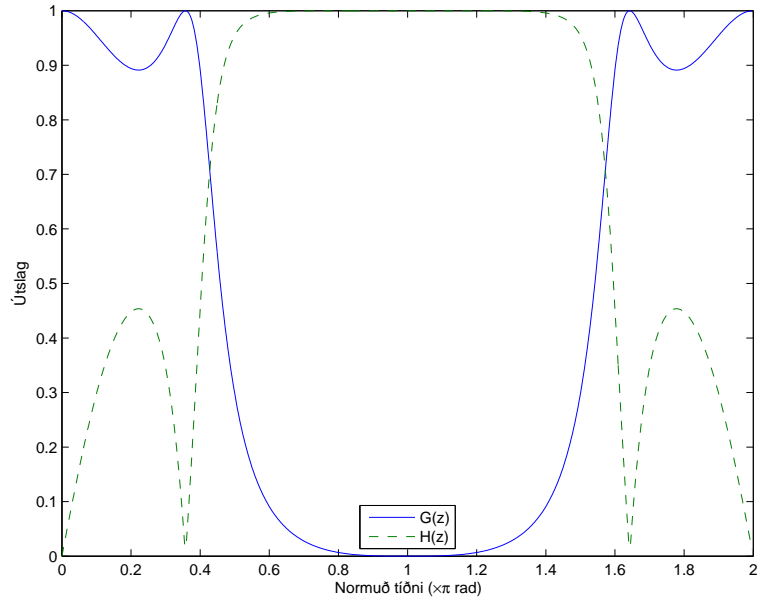
Notum Matlab til þess að reikna föllin og fáum:

$$A_0(z) = \frac{0.6189 - 0.5044z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.5044z^{-1} + 0.6189z^{-2}}, \quad A_1(z) = \frac{-0.4717 + z^{-1}}{1 - 0.4717z^{-1}}$$

Við sjáum að gráða  $A_0$  er 2 og gráða  $A_1$  er 1. Einfaldast er að reikna  $H(z)$  með jöfnu sem gefin er í Mitra:

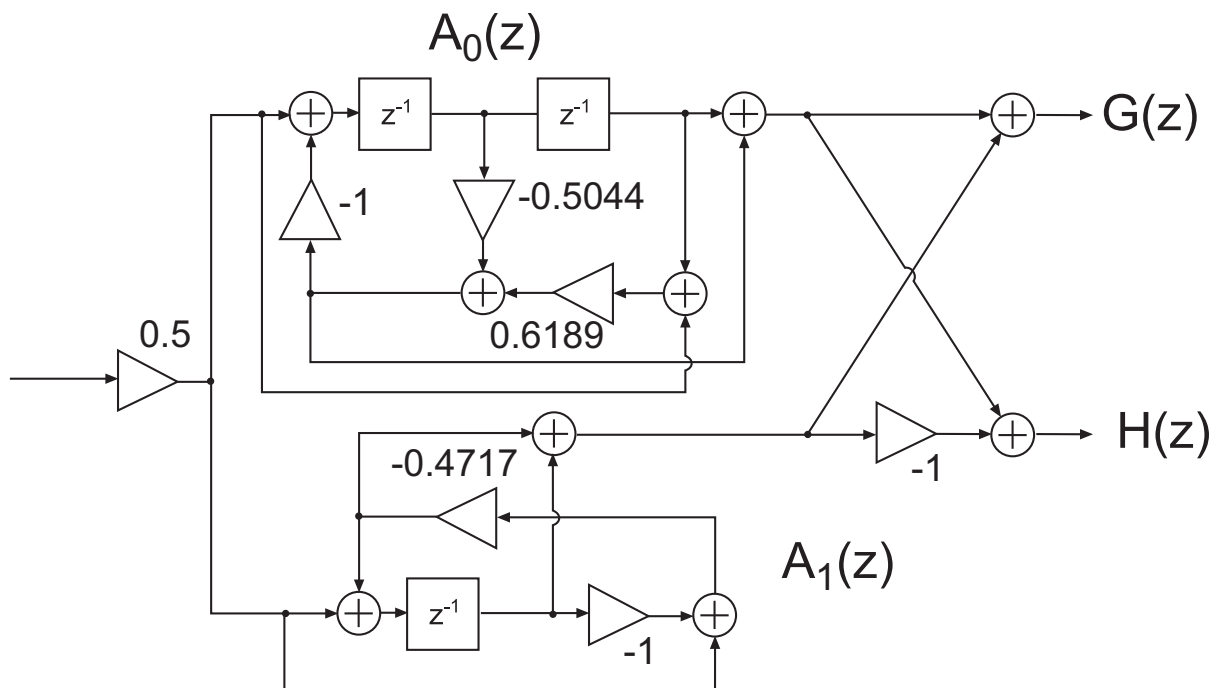
$$H(z) = \frac{1}{2}\{A_0(z) - A_1(z)\} = \frac{0.5453 - 1.0171z^{-1} + 1.0171z^{-2} - 0.5453z^{-3}}{1 - 0.9761z^{-1} + 0.8568z^{-2} - 0.2919z^{-3}}$$

Skodum útslagssvörun  $G(z)$  og  $H(z)$  á mynd 10. Augljóst er að bæði föllin uppfylla BR skilyrðið þar sem algildi hennar fer aldrei yfir 1.



Mynd 10: Útslagssvörun  $G(z)$  (blá lína) og  $H(z)$  (græn brotalína).

Á mynd 11 má svo sjá kassarit af yfirfærsluföllunum. Reynt var að uppfylla skilyrðið um að nota eingöngu 3 margfaldara, en nauðsynlegt var að nota margfaldarann lengst til vinstri í kassaritinu til þess að útfæra jöfnuna. Að öðru leyti eru bara 3 margfaldarar í kassaritinu. Margföldurum með gildinu  $-1$  hefði mátt sleppa og breyta formerkinu í summara á móti, svo þeir teljast ekki með.



Mynd 11: Kassarit af  $G(z)$  og  $H(z)$ .

# A Matlab skrár

## A.1 1. liður keyrsluskrá: nr1a.m

---

```
1 % Merkjafraedi og Siur
2 % Reikniverkefni 2
3 % Sævar Öfjörð Magnússon
4
5 clear all
6 close all
7
8 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
9 % 1. liður
10 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
11
12 % Pólar
13 p1 = 0.9*exp(j*pi/4);
14 p2 = 0.8;
15 p3 = conj(p1);
16
17 % Núll
18 z1 = 1.5*exp(j*pi/8);
19 z2 = 0.5;
20 z3 = conj(z1);
21
22 % yfirfærslufallið reiknað í höndunum.
23 num = conv([1 -z1],conv([1 -z2],[1 -z3])); % [1 -3.2716 3.63572 -1.12496];
24 den = conv([1 -p1],conv([1 -p2],[1 -p3])); % [1 -2.0728 1.82825 -0.648008];
25
26 % yfirfærslufallid
27 H1 = tf(num,den,'variable','z^-1')
28
29 disp('Gain í H1(1):')
30 gain = sum(num)/sum(den)
31 disp('Gain_constant_sem_við_burfum_að_margfalda_mæð:')
32 K = 1/gain
33
34 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
35 % 2. liður
36 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
37
38 % Finnum núllin.
39 z = [z1 z3 z2];
40 Hnumtmp(1,:) = num;
41 % Finnum allar mögulegar margliður úr tveimur núllum:
42 H1num1 = conv([1 -z(1)],[1 -z(2)]);
43 H1num2 = conv([1 -z(1)],[1 -z(3)]);
44 H1num3 = conv([1 -z(2)],[1 -z(3)]);
45 % Svo eru það margliður þar sem eitt núll er fjarlægt
46 Hnumtmp(2,:) = conv([-conj(z(1)) 1],H1num3);
47 Hnumtmp(3,:) = conv([-conj(z(2)) 1],H1num2);
48 Hnumtmp(4,:) = conv([-conj(z(3)) 1],H1num1);
49 % Margliður þar sem tvö núll eru fjarlægð
50 Hnumtmp(5,:) = conv(conv([-conj(z(1)) 1],[-conj(z(2)) 1]],[1 -z(3)]);
51 Hnumtmp(6,:) = conv(conv([-conj(z(2)) 1],[-conj(z(3)) 1]],[1 -z(1)]);
52 Hnumtmp(7,:) = conv(conv([-conj(z(3)) 1],[-conj(z(1)) 1]],[1 -z(2)]);
```

```

53 % Öll núll fjarlægð.
54 Hnumtmp(8,:) = conv(conv([-conj(z(1)) 1],[-conj(z(2)) 1],[-conj(z(3)) 1]);
55
56
57 % Hendum hérna öllum þvergildum lausnum
58 m=1;
59 for k = 1:8
60     if(~any(imag(Hnumtmp(k,:))))
61         Hnum(m,:)=Hnumtmp(k,:);
62         disp(['Yfirfærslufall' num2str(m) ':'])
63         Hnum(m,:)
64         m=m+1;
65     end
66 end
67 disp('Nefnarinn:')
68 den
69
70
71
72 % Finnum fjölda yfirfærslufalla sem eru eftir.
73 sizeHnum = size(Hnum);
74 sizeHnum = sizeHnum(1);
75
76 % Geri hér eina svaðalega forlykkju fyrir gröfin (ætla að nota subfigure í
77 % tekkinu...)
78
79 for k=1:sizeHnum
80     % Finn hérna tíðnisvörðunina
81     [freqresponse(k,:),w] = freqz(K*Hnum(k,:),den,'whole');
82     % Norma tíðnina við pí
83     w = w./pi;
84     % Finn magnitude-ið
85     freqresponse(k,:) =abs(freqresponse(k,:));
86     kk = num2str(k);
87     k2 = num2str(k+sizeHnum);
88     if(k+sizeHnum<=9)
89         k2 = ['0' k2];
90     end
91     if(k<=9)
92         kk = ['0' kk];
93     end
94     figure(k)
95         plot(w,abs(freqresponse(k,:)));
96         title(['|H_' num2str(k) '(z)|']);
97         xlabel('Normuð_tíðni_\(\times\pi\_rad/sýni)');
98         ylabel('Magnitude_(dB)');
99         print(k,'-depsec',[ 'rv02_1b_' kk])
100     figure(k+sizeHnum)
101         zplane(K*Hnum(k,:),den)
102         title(['Pólar_og_núll_fyrir_H_' num2str(k) '(z)']);
103         print(k+sizeHnum,'-depsec',[ 'rv02_1b_' k2])
104 end
105
106 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
107 % 3. liður
108 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

109
110 % Önnur svona svaðaleg lykkja:
111 n=[0:50];
112 for k=1:sizeHnum
113     % Finn tíðnisvörunina
114     [freqresponse(k,:),w] = freqz(K*Hnum(k,:),den);
115     % Norma tíðnina
116     w = w./pi;
117     % Finn fasann
118     freqresponse(k,:) = unwrap(angle(freqresponse(k,:)));
119     clear imp;
120     % Finn impúlssvörunina.
121     imp = impz(Hnum(k,:),den,n);
122     for ii = 1:length(imp)
123         e(ii) = sum(imp(1:ii).^2);
124     end
125     kk = num2str(k);
126     if(k<=9)
127         kk = ['0' kk];
128     end
129     figure(k+2*sizeHnum)
130     subplot(2,2,1)
131         plot(w,freqresponse(k,:))
132         xlabel('Normuð_tíðni_(\times\pi_rad/sýni)');
133         ylabel('Fasi_(rad)');
134         title(['\phi_' num2str(k) '(\omega)']);
135     subplot(2,2,2)
136         plot(w,grpdelay(K*Hnum(k,:),den));
137         xlabel('Normuð_tíðni_(\times\pi_rad/sýni)');
138         ylabel('Grúpuseinkun_(sýni)');
139         title(['\tau_{' num2str(k) '}(\omega)']);
140     subplot(2,2,3)
141         stem(n,imp);
142         xlabel('n_sýni');
143         ylabel('Útslag');
144         title(['Impúlssvörun_h_' num2str(k) '[n]']);
145         axis([0 50 floor(min(real(imp))) ceil(max(real(imp)))]);
146     subplot(2,2,4)
147         stem(n,e);
148         xlabel('n_sýni');
149         ylabel('Útslag');
150         title(['Orka_impúlssvörunar_w_{h' num2str(k) '}[n]']);
151         axis([0 50 floor(min(real(e))) ceil(max(real(e)))]);
152     print(k+2*sizeHnum, '-depsc', ['rv02_1c_' kk])
153
154 end
155
156
157 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
158 % 4. liður
159 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
160 % Grpdelay fallið gefur sjálfkrafa N=512 punkta grúpuseinkun.
161
162 for k=1:sizeHnum
163     w = [0:511]*pi/512;
164     [groupdelay(k,:),w] = grpdelay(K*Hnum(k,:),den);

```

```

165 end
166 % Vitum að fall nr. 3 er með lágmarksfasa
167
168 mismunur(1,:) = groupdelay(1,:) - groupdelay(3,:);
169 mismunur(2,:) = groupdelay(2,:) - groupdelay(3,:);
170 mismunur(3,:) = groupdelay(4,:) - groupdelay(3,:);
171
172 maxdiff = ceil(max(max(mismunur,[],2),[],1));
173
174 figure(1+3*sizeHnum)
175 subplot(1,3,1)
176 plot(w,mismunur(1,:));
177 axis([0 1 0 maxdiff]);
178 ylabel('Grúpuseinkun_\sýni');
179 subplot(1,3,2)
180 plot(w,mismunur(2,:));
181 axis([0 1 0 maxdiff]);
182 xlabel('Normuð_tíðni_\times\pi_rad/sýni');
183 title(['\tau_{g\lambda}(\omega)\_\tau_{gM}(\omega)']);
184 subplot(1,3,3)
185 plot(w,mismunur(3,:));
186 axis([0 1 0 maxdiff]);
187 print(1+3*sizeHnum, '-depsc', ['rv02_1d_01'])
188
189
190 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
191 % 5. liður
192 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
193
194 N=512;
195 k = [0:N-1];
196 wk = k*pi/N;
197 for k=1:4
198     Gd(k,:) = sum(grpdelay(K*Hnum(k,:),den, wk).*(pi/N));
199 end
200
201 disp('Þetta_er_1-liður_okkar:')
202 Gd*2/pi
203
204
205 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
206 % 6. liður
207 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
208
209 % æsum kerfið með slembnu innmerki
210 v=rand(1,100);
211 ym = filter(K*Hnum(3,:),den,v);
212 y1 = filter(K*Hnum(1,:),den,v);
213 % Running energies
214 for i = 1:length(ym)
215     ymre(i) = sum(ym(1:i).^2);
216 end
217 for i = 1:length(y1)
218     y1re(i) = sum(y1(1:i).^2);
219 end
220 clear i;

```

```

221
222 % finnum mismuninn og plottum hann líka
223 diff = ymre - ylre;
224
225 figure(2+3*sizeHnum)
226     subplot(1,3,1)
227         stem(ymre);
228         axis([0 100 0 50]);
229         ylabel('Orka_/_Mismunur_á_orku');
230     subplot(1,3,2)
231         stem(ylre);
232         axis([0 100 0 50]);
233         xlabel('m_sýni');
234         title(['w_{yM}[m]_w_{y\lambda}[m]']);
235     subplot(1,3,3)
236         stem(diff);
237         axis([0 100 -2 5]);
238 print (2+3*sizeHnum, '-depsc', ['rv02_1f_01'])
239
240
241 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
242 % 7. liður
243 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
244
245 % kerfi 3 er lágmarksfasa:
246 HminNum = K*Hnum(3,:);
247 HminDen = den;
248
249 % Finnum groupdelay:
250 [GdminI,w1] = grpdelay(den,HminNum);
251 [Gdmin,w2] = grpdelay(HminNum,den);
252
253 maxgd = ceil(max(Gdmin));
254
255 figure(3+3*sizeHnum)
256     subplot(1,2,1)
257         plot(w2/pi,Gdmin);
258         axis([0 1 -maxgd maxgd]);
259         xlabel('Normuð_tíðni_(\times\pi_rad/sýni)');
260         title(['\tau_{gM}(\omega)']);
261         ylabel('Grúpuseinkun_(sýni)');
262     subplot(1,2,2)
263         plot(w1/pi,GdminI);
264         axis([0 1 -maxgd maxgd]);
265         xlabel('Normuð_tíðni_(\times\pi_rad/sýni)');
266         title(['\tau_{gMi}(\omega)']);
267         ylabel('Grúpuseinkun_(sýni)');
268 print (3+3*sizeHnum, '-depsec', ['rv02_1g_01'])

```

---

## A.2 2. liður keyrsluskrá: nr2.m

---

```
1 % Merkjafraedi og Siur
2 % Reikniverkefni 2
3 % Sævar Öfjörð Magnússon
4
5 clear all
6 close all
7
8 z1 = 0.9*exp(j*pi/5);
9 z2 = -j;
10
11 % null a einingahring gefur conjugate, null sem er ekki a einingahring
12 % gefur conjugate, auk andhverfu og andhverfu-conjugate...
13
14 z3 = conj(z1);
15 z4 = conj(z2);
16 z5 = 1/z3;
17 z6 = 1/z1;
18 z7 = 1
19
20 Ha = poly([z1;z2;z3;z4;z5;z6]);
21 Hb = poly([z1;z2;z3;z4;z5;z6;z7]);
22
23 [Haz,w1] = freqz(Ha,1,1024,'whole');
24 [Hbz,w2] = freqz(Hb,1,1024,'whole');
25 w1 = w1;
26 w2 = w2;
27 H0a = exp(i*w1*3).*Haz;
28 H0b = exp(i*w2*3.5).*Hbz;
29 figure(1)
30 plot(w1/pi,real(H0a));
31 hold on
32 plot(w2/pi,imag(H0b),'Color',[0 0.498 0],'LineStyle','—');
33 hold off
34 xlabel('Normuð_tíðni_(\times\pi_rad)');
35 ylabel('Útslag');
36 legend('H_{0a}(e^{j\omega})','H_{0b}(e^{j\omega})','Location','SouthEast')
37 annotation(...
38     1,'textbox',...
39     'Position',[0.4607 0.6262 0.09286 0.05952],...
40     'LineStyle','none',...
41     'FitHeightToText','off',...
42     'String',{'raungilt'});
43 %% Create textbox
44 annotation2 = annotation(...
45     1,'textbox',...
46     'Position',[0.2807 0.5395 0.09286 0.05952],...
47     'LineStyle','none',...
48     'FitHeightToText','off',...
49     'String',{'þvergilt'});
50 %% Create arrow
51 annotation3 = annotation(1,'arrow',[0.3125 0.4054],[0.5429 0.5429]);
52 %% Create arrow
53 annotation4 = annotation(1,'arrow',[0.5196 0.4411],[0.6262 0.6262]);
54 print(1,'-depsc','rv02_2_01')
```

```

55 figure(2)
56     plot(w1/pi, unwrap(angle(H0a)))
57     hold on
58     plot(w2/pi, unwrap(angle(H0b)), 'Color', [0 0.498 0], 'LineStyle', '—')
59     hold off
60     xlabel('Normuð_tíðni_(\times\pi_rad)');
61     ylabel('Fasi_(rad)');
62     legend('H_{0a}(e^{j\omega})', 'H_{0b}(e^{j\omega})', 'Location', 'NorthWest')
63     print(2, '-depsc', 'rv02_2_02')
64 figure(3)
65     subplot(2,1,1)
66         plot(w1/pi, abs(Haz))
67         xlabel('Normuð_tíðni_(\times\pi_rad)');
68         ylabel('Útslag');
69     subplot(2,1,2)
70         plot(w1/pi, unwrap(angle(Haz)))
71         xlabel('Normuð_tíðni_(\times\pi_rad)');
72         ylabel('Fasi_(rad)');
73     print(3, '-depsc', 'rv02_2_03')
74 figure(4)
75     subplot(2,1,1)
76         plot(w2/pi, abs(Hbz))
77         xlabel('Normuð_tíðni_(\times\pi_rad)');
78         ylabel('Útslag');
79     subplot(2,1,2)
80         plot(w2/pi, unwrap(angle(Hbz)))
81         xlabel('Normuð_tíðni_(\times\pi_rad)');
82         ylabel('Fasi_(rad)');
83     print(4, '-depsc', 'rv02_2_04')

```

---

### A.3 3. liður keyrsluskrá 1: nr3.m

---

```

1  % Merkjafræði og Síur
2  % Reikniverkefni 2
3  % Sævar Öfjörð Magnússon
4
5  clear all
6  close all
7
8  H1 = [2 10 23 34 31 16 4];
9  H2 = [6 31 74 102 74 31 6];
10
11 [h01, beta1] = poly2casc(H1)
12 [h02, beta2] = poly2casc(H2)

```

---

## A.4 4. liður keyrsluskrá 1: nr4.m

---

```
1 % Merkjafraedi og Siur
2 % Reikniverkefni 2
3 % Sævar Öfjörð Magnússon
4
5 clear all
6 close all
7
8 Gnum = [0.0736 0.2208 0.2208 0.0736];
9 Gden = [1 -0.9761 0.8568 -0.2919];
10
11 poles = sort(roots(Gden))
12
13 [z,p,k] = zpndata(tf(Gnum,Gden));
14
15 % A0num = conv([-poles(2) 1],[-poles(3) 1]);
16 % A0den = conv([1 -poles(2)],[1 -poles(3)]);
17 % A1num = [-poles(1) 1];
18 % A1den = [1 -poles(1)];
19 polar = sortrows([real(poles) imag(poles)],2)
20 A0num = 1;
21 A0den = 1;
22 A1num = 1;
23 A1den = 1;
24 clear i;
25 for k=1:3
26     if mod(k,2)~=0
27         A0num = conv([-polar(k,1)+polar(k,2)*i] 1),A0num);
28         A0den = conv([1 -(polar(k,1)+polar(k,2)*i)],A0den);
29     else
30         A1num = conv([-polar(k,1)+polar(k,2)*i] 1),A1num);
31         A1den = conv([1 -(polar(k,1)+polar(k,2)*i)],A1den);
32     end
33 end
34
35 Hnum = 0.5*(conv(A0num,A1den)-conv(A1num,A0den));
36 Hden = conv(A0den,A1den);
37
38 [Gfreqz,w1] = freqz(Gnum,Gden,'whole');
39 [Hfreqz,w2] = freqz(Hnum,Hden,'whole');
40 figure(1)
41 plot(w1/pi,abs(Gfreqz));
42 hold on;
43 plot(w2/pi,abs(Hfreqz),'Color',[0 0.498 0],'LineStyle','--');
44 xlabel('Normuð_tíðni_(\times\pi_rad)');
45 ylabel('Útslag');
46 legend('G(z)','H(z)','Location','South')
47 print(1, '-depsc','rv02_4_01')
```

---